

KERNFORSCHUNGSZENTRUM KARLSRUHE  
Institut für Reaktorentwicklung  
Projekt Nukleare Sicherheit

KfK 2645

Effektive Berechnung dreidimensionaler  
Fluid-Struktur-Wechselwirkung beim Kühl-  
mittelverluststörfall eines Druckwasserreaktors  
- FLUX -

Ulrich Schumann <sup>+)</sup>

UNIVERSITÄTSBIBLIOTHEK  
HANNOVER  
TECHNISCHE  
INFORMATIONSBIBLIOTHEK

Kernforschungszentrum Karlsruhe GmbH, Karlsruhe

---

<sup>+)</sup>  Habilitationsschrift, Karlsruhe 1978



ZA 5141 (2645)

Als Manuskript vervielfältigt  
Für diesen Bericht behalten wir uns alle Rechte vor

Kernforschungszentrum Karlsruhe GmbH  
ISSN 0303-4003

## ZUSAMMENFASSUNG

Es wird ein numerisches Verfahren (Rechenprogramm FLUX) zur Untersuchung der Belastungen von Druckbehälter-Einbauten beim Kühlmittelverluststörfall ("Blowdown") eines Druckwasserreaktors beschrieben. Insbesondere werden die Verformungen des Kernmantels bestimmt, der im Betriebszustand der Strömungsführung im Druckbehälter dient und im wesentlichen aus einer relativ dünnen zylindrischen Schale besteht.

Das verwendete Modell basiert auf folgenden wesentlichen Annahmen: dreidimensionale Potentialströmung, konstante Schallgeschwindigkeit, linear-elastische Struktur und kleine Strukturverformungen. Nicht vernachlässigt werden die Fluid-Struktur-Wechselwirkungen sowie nichtlineare Trägheitskräfte im Fluid. In den vorliegenden Programmversionen (für inkompressibles und kompressibles Fluid) werden die dynamischen Eigenschaften des Kernmantels mit dem vorhandenen Schalenmodell CYLDY2 beschrieben. Die hierbei gültigen Erhaltungsgleichungen werden durch implizite Differenzengleichungen approximiert. Bei der Formulierung der Koppelungsbeziehungen zwischen Fluid und Struktur wird die Einhaltung einer Sachgemäßheitsbedingung sichergestellt. Das Verfahren ist (im linearisierten Fall) unbedingt stabil und frei von numerischer Dämpfung.

Die aus der impliziten Formulierung resultierenden linearen Gleichungssysteme für das gekoppelte System werden ohne Iterationen allein unter Verwendung direkter Lösungsverfahren gelöst. Mittels "schneller elliptischer Löser" und einer "Einflußmatrix-Technik" werden hierfür besonders effektive und teilweise neuartige Verfahren bereitgestellt. Eine Parameterstudie zeigt, daß eine für viele Anwendungen ausreichende Genauigkeit mit einem Maschennetz mit etwa 1000 Fluidmaschen und 150 Strukturfreiheitsgraden erzielt wird. Solche Rechnungen erfordern Rechenzeiten von typischerweise 40 Minuten auf einem Rechner vom Typ IBM 370/168, was für ein dreidimensionales Problem vergleichsweise wenig ist.

## II

Die Programme berechnen virtuelle Fluid-Massen, Eigenschwingungen, Druckbelastungen und Kernmantel-Verformungen und -Spannungen. Insbesondere werden die Programme auf die Bedingungen der geplanten "HDR-Blowdown-Experimente", eines der bereits durchgeführten "RS16-Experimente" und für den Fall eines typischen Druckwasserreaktors angewandt. Der Vergleich mit dem RS16-Experiment ergibt eine ausreichende Übereinstimmung zwischen diesen Rechnungen und den Messungen. Eine Parameterstudie zeigt u.a. die große Bedeutung, die bei diesen Anwendungen einer gekoppelten fluid- und strukturdynamischen Analyse zukommt. Die Kompressibilität des Fluids ist demgegenüber von geringerer Bedeutung.



### III

#### EFFICIENT COMPUTATION OF THREE-DIMENSIONAL FLUID- STRUCTURE INTERACTIONS DURING BLOWDOWN OF A PRESSURIZED WATER REACTOR

- FLUX -

##### SUMMARY

A numerical method (computer program FLUX) for investigation of the loads on reactor vessel internal structures during a loss-of-coolant accident of a pressurized water reactor is described. In particular, the deformations of the core barrel are determined. Under operating conditions the core barrel controls the flow path in the vessel and consists mainly out of a relatively thin cylindrical shell.

The model used in this method is based on the following essential assumptions: three-dimensional potential flow, constant speed of sound, linear-elastic structure and small structural deformations. Not neglected are the fluid-structure interactions and the non-linear inertia forces in the fluid. In the present program versions (for incompressible and compressible fluid) the dynamical properties of the core barrel are described by means of the existing shell model CYLDY2. The relevant conservation equations are approximated by an implicit finite difference scheme. In the formulation of the coupling relations between fluid and structure a well-posedness condition is insured. The method is (in the linearized case) unconditionally stable and free of numerical damping.

The set of linear equations which arises from the implicit formulation for the coupled system is solved without iterations employing direct solvers. By means of "fast elliptic solvers" and an "influence" or "capacitance matrix technique" very effective methods have been developed for this purpose. A parameter study shows that sufficient accuracy for many applications is achieved using a discretization with approximately 1000 fluid mesh cells and 150 structural degrees of freedom. Such computations require

#### IV

typically 40 minutes computing time on an IBM 370/168 computer which is a relatively small time for a three-dimensional problem.

The programs compute virtual fluid masses, eigen-oscillations, pressure loads and core-barrel displacements and stresses. In particular, the programs are applied to the conditions of the planned "HDR-blowdown-experiments", one of the performed "RS16-experiments" and for the situation of a typical pressurized water reactor. The computed results compare sufficiently well with the RS16 measurements. A parameter study shows (among others) the great importance of a coupled fluid-structure analysis in these cases. In comparison to the coupling the compressibility of the fluid is less important.

## INHALTSVERZEICHNIS

	Seite
Zusammenfassung	I
Summary	III
Nomenklatur	IX
1. Einleitung	1
1.0 Zweck der Arbeit	1
1.1 Der Reaktor-Sicherheits-Aspekt	2
1.2 Der Modell-Aspekt	6
1.3 Der numerische Aspekt	18
2. Die Modell-Gleichungen und ihre Diskretisierung	28
2.1 Voraussetzungen	28
2.2 Die Fluidodynamik-Gleichungen	31
2.3 Die (diskretisierten) Strukturdynamik-Gleichungen	32
2.4 Die zeitliche Diskretisierung	35
2.5 Die räumliche Diskretisierung der fluid-dynamischen Gleichungen	42
2.6 Die räumlich diskretisierten Fluid-Struktur-Koppelungsgleichungen	50
2.7 Zusammenfassung des resultierenden Gleichungssystems	56
3. Sachgemäßheit und Stabilität der gekoppelten Rechnung	58
3.1 Sachgemäß formulierte Schwingungsgleichung	58
3.2 Sachgemäßheit gekoppelter Fluid-Struktur-Systeme	59
3.3 Sonderfälle: inkompressibles Fluid oder masselose Struktur	62
3.4 Sachgemäßheit der vorliegenden gekoppelten Schwingungsgleichung bei der gewählten Diskretisierung	63
4. Elemente des numerischen Lösungsverfahrens	67
4.1 Grundlage 1: Schnelle Kosinus- und Sinustransformation	67
4.2 Grundlage 2: Schneller elliptischer Löser POISTP	69

## VI

	Seite
4.3 Grundlage 3: Einfluß-Matrix-Technik, EMT	76
4.4 Anwendung 1: Lösung der 2D-Probleme mittels EMT, Hauptachsentransformation und SEL	83
4.5 Anwendung 2: Lösung des 3D-Problems mittels EMT, Kosinustransformation und Anwendung des 2D-Lösungsverfahrens	88
4.6 Rechnungs-Ablauf	89
5. Sonderfall: Inkompressibles Fluid-FLUX1	91
5.1 Das FLUX1-Modell	91
5.2 Virtuelle Dämpfungs-Matrix	94
5.3 Analytische Näherungsformeln für virtuelle Massen, Eigenfrequenzen und Dämpfungskoeffi- zienten	97
6. Numerische Ergebnisse und Diskussion	100
6.1 Die betrachteten Fälle	100
6.2 FLUX1: Ergebnisse für inkompressibles Fluid	104
6.3 FLUX2: Ergebnisse für den HDR bei kompressiblem Fluid, Diskussion und Parametervariation	123
6.4 Nachrechnung des RS16-Experiments	150
6.5 Belastungen eines DWR-Kernmantels	164
7. Schlußfolgerungen	168

## VII

	Seite
Tabellen 1 - 8	171
Anhang 1: Ableitung der verwendeten Fluid-Gleichungen	184
Anhang 2: Zeitdiskretisierung: Newmark- und ICE-Technik	191
Anhang 3: Einzelheiten der örtlichen Diskretisierung	200
Anhang 4: Hauptachsentransformation und Behandlung von Dämpfung	216
Anhang 5: Der schnelle elliptische Löser POISTP: Einzelheiten	220
Anhang 6: Näherungsformeln für virtuelle Fluid-Massen und Dämpfungs-Koeffizienten	229
Anhang 7: Dimensionsanalyse	234
Anhang 8: Diskussion der Approximationen des FLUX1-Modells	239
Anhang 9: Mögliche Weiterentwicklung des Modells	242
Literatur	243

## VIII

## Seitennummern der Abbildungen

Abb.	Seite	Abb.	Seite	Abb.	Seite
1-1	3	6-1	101	6-21	134
-2	5	-2	105	-22	136
-3	15	-3	107	-23	138
-4	16	-4	108	-24	139
-5	18	-5	110	-25	140
2-1	30	-6	111	-26	142
-2	42	-7	112	-27	143
-3	46	-8	113	-28	145
-4	48	-9	116	-29	145
-5	51	-10	118	-30	146
-6	57	-11	119	-31	148
3-1	65	-12	120	-32	151
4-1	68	-13	120	-33	152
-2	69	-14	124	-34	154
-3	75	-15	125	-35	155
-4	86	-16	126	-36	156
5-1	92	-17	127	-37	157
-2	93	-18	128	-38	159
-3	96	-19	129	-39	161
-4	98	-20	131	-40	162
6-41	163				
-42	165				
-43	166				
-44	167				
A2-1	197				
A3-1	210				
A5-1	221				

## NOMENKLATUR

1. Allgemeine Vereinbarungen

$[1]$	Literatur Referenz
(1-1)	Gleichungs-Nummern-Referenz
§1	Kapiteln-Nummer-Referenz
$\alpha$	irgendein Skalar
$\underline{a}$	ein dreidimensionaler Vektor
$\alpha_i, \alpha_{ij}, \alpha_{ijk}$	Komponenten eines Vektors
$\underline{a} = \{\alpha_i\}$ , bzw. $\{\alpha_{ij}\}$	ein multidimensionaler Vektor, z.B. $\underline{a} = \{\alpha_{11}, \alpha_{21}, \alpha_{12}, \alpha_{22}\}^T$
$A_{i,j}, A_{i,j,kl}$	Komponenten einer Matrix
$\underline{\underline{A}} = [A_{i,j}]$ , bzw. $[A_{i,j,kl}]$	eine Matrix, z.B. $\underline{\underline{A}} = \begin{bmatrix} A_{11,11} & A_{11,21} & A_{11,12} & A_{11,22} \\ A_{21,11} & A_{21,21} & A_{21,12} & A_{21,22} \\ A_{12,11} & A_{12,21} & A_{12,12} & A_{12,22} \\ A_{22,11} & A_{22,21} & A_{22,12} & A_{22,22} \end{bmatrix}$
$\underline{a}^T, \underline{\underline{A}}^T$	transponierter Vektor bzw. Matrix
$\dot{a}, \ddot{a}$	erste und zweite Zeitableitung von $a$
$\underline{a} \cdot \underline{b}$	Skalarprodukt zweier Vektoren
$\hat{a}$	Koeffizient der Kosinus-Reihe
$\det(\underline{\underline{A}})$	Determinante von $\underline{\underline{A}}$
$\text{diag}(\alpha^{(i)})$	Diagonalmatrix mit Komponenten $\alpha^{(i)}$ auf der Hauptdiagonalen
$\text{div}(\underline{a})$	Divergenz eines Vektors
$\text{grad}(\alpha)$	Gradient eines Skalars
$\nabla$	Nabla-Operator in kartesischen Koordinaten
$\nabla^2 = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$	

$\Delta a$	Differenz zweier a-Werte
$\delta a$	Änderung in a
$a_i \cdot b_i \equiv \underline{a} \cdot \underline{b}$	Einsteinsche Summationskonvention
$\Sigma$	Summen-Zeichen
$\Pi$	Produkt-Zeichen

## 2. Indizes

### 2.1 Zahlen

#### tiefgestellte Indizes

$i$	vornehmlich:	radialer Index
$j$	"	: axialer Index
$k = 0, 1, \dots, K$	"	: modaler Index
$\ell = 0, 1, \dots, K$	"	: azimuthaler Index
$m = 1, 2, \dots, M$	"	: Index der axialen Formfunktionen
$n = 0, 1, \dots, N$	"	: Index der azimuthalen Formfunktionen

#### hochgestellter Index

$n = 0, 1, \dots$	Zeit-Niveau
-------------------	-------------

### 2.2 Symbolische Indizes

$\epsilon$	zu den Struktur-Modes
$D$	an dem Übergang Druckbehälter-Stützen
$F$	zum Fluid
$g$	zu den Wand-Normalgradienten
$max$	maximal
$M$	zum Kern-Mantel
$n$	Normal-Komponente
$p$	zum Druck gehörig
$r$	radiale Komponente
$S$	zum Rohr-Stützen
$t$	tangentiale Komponente
$V$	zur Druckbehälter-Wand(vessel)
$W$	an der flexiblen Wand
$z$	axial (von oben nach unten)



$\varphi$	azimutal
$\Phi$	zum Potential
$\psi$	zum Hilfs-Potential
$o$	Anfangswert
$1$	Randwert an der Bruchstelle

3. Auswahl häufig auftretender Symbole (siehe auch Tabelle 1, Abb.2-3 und Abb.6-1)

		<u>Definition</u>
$a$	Schallgeschwindigkeit	(2-2)
$\underline{A}$	tridiagonale Matrix	(A5-7)
$b_k$	Koeffizient in Kosinus-Reihe	(A3-4)
$c$	Struktur-Mode-Amplitude	§2.3.1
$\underline{C}$	Einflußmatrix	(4-17)
$D$	Dämpfungskoeffizient	(2-9,3-5)
$E$	spezifische kinetische Energie des Fluides	(A1-12)
$E$	Elastizitäts-Modul	Eingabe
$F, \underline{F}$	Virtuelle Fluidmasse	(3-15)
$\underline{F}_1$	Struktur-Koeffizientenmatrix	(2-38a)
$f=\omega/2\pi$	Frequenz	-
$f_2, f_3$	Abkürzungen	(2-38b,c)
$f_{damp}$	Koeffizient der Fluid-Reibung	(A1-37)
$f_{Loch}$	Flächenanteil der Löcher im Flansch in Gl.(A3-44)	Eingabe
$g$	Druck- oder Potential-Gradient	(A3-44)
$\underline{I}$	Einheitsmatrix $[\delta_{i,j}]$	-
$K$	Maximaler Kosinus-Mode	Eingabe
$\underline{L}, \underline{\mathcal{L}}$	Diskretes Analogon zum Laplace-Operator	(2-53,3-5)
$\underline{M}, \underline{\mathcal{M}}$	Massen-Matrix	(2-9,3-5)
$M$	Anzahl der Maschen in x-Richtung	Abb.A5-1
$M$	Anzahl der axialen Formfunktion	(2-14)
$\underline{n}$	innere Normale des Fluidbereiches	-
$N$	Anzahl der Maschen in y-Richtung	Abb.A5-1
$N \leq K$	Maximaler Index der azimutalen Formfunktionen	(2-14)

$\underline{N}$	Matrix zur Erfassung der Neumann-Randbedingung (2-46) an der Druckbehälter-Wand	
$p$	Druck	-
$q$	Last	(2-12)
$r$	radiale Koordinate oder rechte Seite	Abb.2-2
$\underline{R}, \underline{R}$	Rückwärtstransformations-Matrix	(2-65', 3-5)
$\underline{R}'$	Matrix zur Erfassung des Einflusses der Gradienten auf die Last	(2-65')
$\underline{S}, \underline{S}$	Steifigkeits-Matrizen	(2-9, 3-5)
$\gamma_{damp}$	Struktur-Dämpfungs-Koeffizient	(A4-10)
$t$	Zeit	-
$T_{i,j}, T'_{i,j}$	Koeffizient der Kosinus-Reihe	(A3-5, -8)
$\underline{u}$	Geschwindigkeits-Vektor	-
$v$	Fluid-Geschwindigkeit im Rohr am Stutzen	-
$\underline{v}$	Formfunktion	(2-8)
$\underline{V}, \underline{V}$	Vorwärts-Transformation	§A3.4, (3-5)
$\underline{w}$	Struktur-Verformung	-
$w, w_n$	Normalen-Komponente	(2-36)
$x$	Koordinate	-
$\underline{x}$	Ortsvektor	-
$\underline{x}_i$	Eigenvektor zum i-ten Eigenwert	(A4-2)
$\underline{X}$	Eigenvektor-Matrix $[\underline{x}_i]$	(A4-3)
$y$	Koordinate	-
$z$	axiale Koordinate (von oben nach unten)	Abb.2-2
$\beta, \gamma$	Koeffizient der Zeit-Integration	(A2-5)
$\delta_{i,j}$	Kronecker-Delta, $\delta_{i,j} = 1$ für $i=j$ $\delta_{i,j} = 0$ für $i \neq j$	-
$\varepsilon$	Abbruchkriterium der CYR und EMT	(A5-26)
$\eta$	dynamische Viskosität	-
$\alpha$	Fluid-Reibkoeffizient	(A1-10)
$\lambda^2$	Helmholtz-Parameter $\sim 1/(a \Delta t)^2$	(2-38d)
$\lambda_k^2$	Helmholtz-Parameter $\sim k^2$	(A3-26)
$\lambda^{(i)}$	i-ter Eigenwert	(A4-2)
$\underline{\Lambda}$	Eigenwerte-Matrix $\text{diag}(\lambda^{(i)})$	(A4-3)
$\nu$	Querkontraktions-Zahl	-
$\pi_j$	dimensionslose Kennzahl	§A7
$\rho$	Dichte	-
$\sigma$	Spannung	§6.2.4

# XIII

$\tau$	Beschleunigungszeit	Abb.5-1
$\varphi$	azimutale Koordinate	(A3-1)
$\Phi$	Geschwindigkeits-Potential	(A1-8)
$\gamma$	Hilfs-Potential	(2-17)
$\omega$	Kreis-Frequenz	-

## 4. Abkürzungen im Text

Abb.	Abbildung
CYR	Zyklische Reduktion (cyclic reduction)
DWR	Druckwasserreaktor
EMT	Einflußmatrix-Technik (capacitance matrix technique)
FFT	Fast Fourier Transform
GE	Gauß'sches Eliminationsverfahren
G1.	Gleichung
HDR	Der Heißdampfreaktor in Karlstein
PL/1	Bezeichnung einer Programmiersprache
RS16	Bezeichnung eines Forschungsvorhabens
SEL	schneller elliptischer Löser
1D,2D,3D	ein-, zwei-, dreidimensional

## 1. EINLEITUNG

### 1.0 Zweck der Arbeit

Der Zweck dieser Arbeit ist:

a) Untersuchung eines Sicherheitsproblems der Reaktortechnik:

Es werden die Belastungen der Kerneinbauten eines Druckwasserreaktors (DWRs) beim Kühlmittelverluststörfall [1] untersucht. Als Ursache dieses Störfalls wird ein plötzlicher Bruch einer Kühlmittelleitung angenommen. Der schnelle Kühlmittelverlust wird auch als "Blowdown" bezeichnet. Wesentliche Fragen betreffen die in den Einbauten auftretenden maximalen Spannungen sowie die Bedeutung der Fluid-Struktur-Wechselwirkung.

b) Erstellung eines möglichst einfachen und doch realistischen Modells:

Die größten Belastungen treten in der anfänglichen unterkühlten und stark beschleunigten Phase des Blowdowns auf. Es wird gezeigt, daß in dieser Phase die Strömung als Potentialströmung mit konstanter Schallgeschwindigkeit beschrieben werden kann. In erster Näherung ist die Kompressibilität sogar vernachlässigbar. Es werden kleine Strukturverformungen vorausgesetzt. Die Wichtigkeit einer gekoppelten Rechnung wird demonstriert. Das Modell wird anhand von Parameterstudien und durch Nachrechnung eines Experiments [2] verifiziert.

c) Erstellung eines effektiven numerischen Lösungsverfahrens:

Es wird ein implizites Diskretisierungsverfahren entwickelt und seine Stabilität sowie numerischen Dämpfungseigenschaften werden untersucht. Wesentliches Anliegen dieser Arbeit ist der Nachweis der Anwendbarkeit sogenannter "schneller elliptischer Löser" (SEL) [3], mit deren Hilfe die numerische Simulation äußerst effektiv gestaltet werden kann.

Diese drei Aspekte werden in dieser Einleitung erläutert.

## 1.1 Der Reaktor-Sicherheits-Aspekt

### 1.1.1 Das Problem

Im Genehmigungsverfahren eines Druckwasser-Reaktors ist nachzuweisen, daß die sicherheitsrelevanten Bauteile, insbesondere der Kernmantel, den Belastungen bei Blowdown des Druckbehälters standhalten. Abb. 1-1 (aus [4\_7]) zeigt schematisch eine DWR-Geometrie mit dem Kernmantel. Der "Blowdown" oder das "Abblasen" des Druckbehälters wird als Folge eines Bruchs einer Kühlmittelleitung (besonders kritisch ist der kalte Strang [1\_7]) angenommen. Der Bruchvorgang selbst wird hier nicht diskutiert; vielmehr wird, wie bei solchen Untersuchungen üblich, eine Bruchöffnungszeit (z.B. 3 ms) vorgegeben. Anfänglich ist der Druckbehälter vollständig mit Wasser bei Drücken der Größenordnung\*) 15 MPa (150 bar) und relativ hohen Temperaturen, die aber deutlich unterhalb der Sättigungstemperatur liegen (ca. 290 °C, Sättigung bei 350 °C) gefüllt. Nach Bruch der Kühlmittelleitung läuft, wie in Abb. 1-1 angedeutet, eine Druckentlastungsfront in den Druckbehälter hinein. Entsprechend der zwar kleinen aber doch vorhandenen Kompressibilität des Wassers entspannt sich das Wasser zunächst innerhalb etwa der ersten 100 ms bis auf den Sättigungsdruck von ca. 7 MPa und fängt dann an zu siedeln. In der anfänglichen einphasigen Zeit können am Kernmantel große Differenzdrücke wirken, die diese im Vergleich zum Druckbehälter (Wandstärke 250 mm) relativ dünne Schale (80 mm) stark verformen können. Die maximal im Kernmantel auftretende Spannung darf eine zulässige Spannung nicht überschreiten. Ein Bruch des Kernmantels könnte die schnelle Abschaltung des Reaktors, dessen Kern innerhalb des Kernmantels aufgehängt ist (in Abb. 1-1 nicht gezeichnet), sowie seine spätere Notkühlung in Frage stellen.

---

\*) Die Zahlenwerte beziehen sich auf einen DWR von Typ Biblis-B [95\_7]. Dimensionslose Kennzahlen sind in Anhang 7 angegeben.

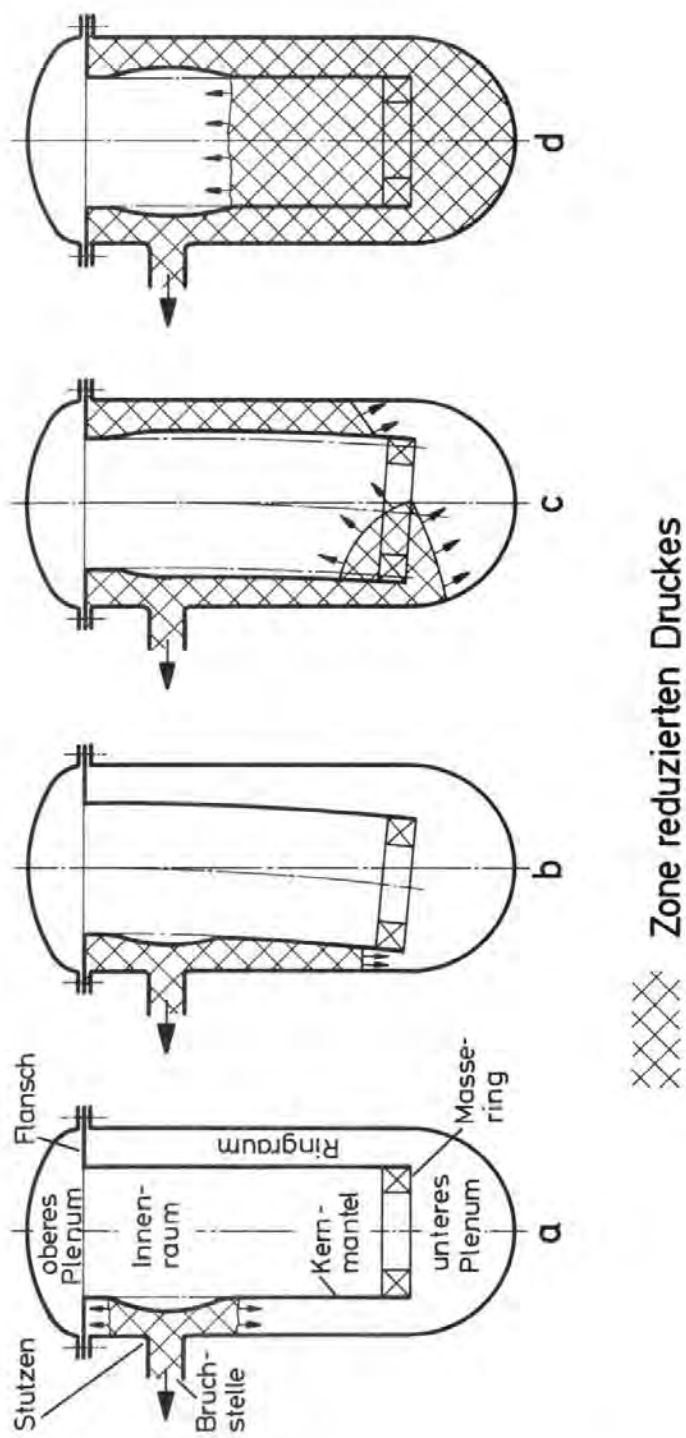


Abb. 1-1: Druckentlastung und Kernmantelverformung - schematisch

### 1.1.2 Stand der Technik

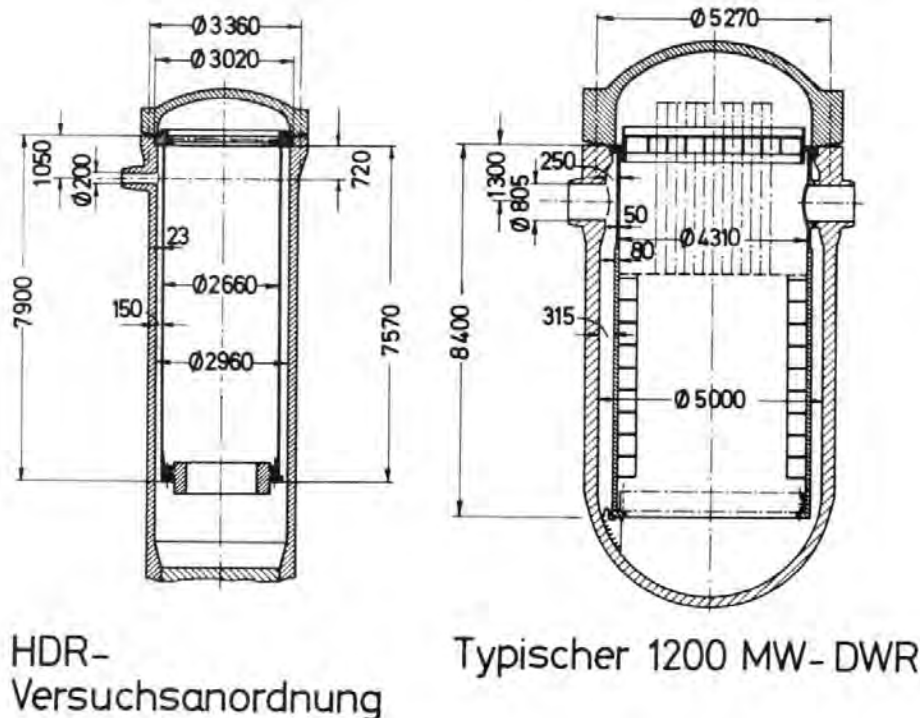
Selbstverständlich mußte die Haltbarkeit des Kernmantels bereits für die gebauten DWRs nachgewiesen werden. Zu diesem Zweck wurden bisher die maximalen Spannungen mit pessimistischen Vereinfachungen ("konservativ") abgeschätzt und sichergestellt, daß die so erhaltenen oberen Schranken für die tatsächliche Maximalspannung unterhalb der zulässigen Werte liegen [4, 7]. Eine wesentliche Vereinfachung bestand darin, daß die Fluid- und Strukturmechanik entkoppelt gerechnet wurden. D.h., zunächst wurde das Druckfeld unter der Annahme starrer Struktur ermittelt und danach die Reaktion der Struktur auf diese Last berechnet. Die Konservativität dieses Vorgehens scheint einleuchtend, da das tatsächliche simultane Nachgeben der Struktur zu einer Verminderung der Last führen dürfte (allerdings war diese Aussage bisher nicht gesichert).

### 1.1.3 Vorgehensweise in dieser Arbeit

Die vorliegende Untersuchung ist Teil eines größeren experimentellen und theoretischen Programms [4, 5, 6, 7], mit dem u.a.

- a) die Konservativität der Auslegungsrechnungen bestätigt werden soll.
- b) der Sicherheitsabstand zwischen Blowdown-Beanspruchung und Versagenspunkt quantitativ ermittelt werden soll.

Hierzu werden gegenwärtig Blowdown-Experimente an dem stillgelegten HDR-Reaktor vorbereitet. Zu diesem Zweck wurde der HDR-Druckbehälter mit einem DWR-ähnlichen Kernmantel ausgerüstet. Das Reaktorcore wird aus Kostengründen zunächst nicht in die Untersuchungen eingeschlossen. Lediglich die dynamisch wirksame Masse des Cores wird mit einem Masse-Ring am unteren Ende des Kernmantels simuliert. Abb. 1-2 zeigt die HDR-Experiment-Konfiguration im Vergleich mit einem typischen DWR kommerzieller



HDR-Experiment

DWR der 1200 MW-Klasse

Abb. 1-2 Vergleich HDR-DWR

Bauweise (1200 MWe). Man erkennt, daß das Experiment weitgehend eine 1:1 Simulation erlaubt. Mehr über die Gesichtspunkte der Experiment-Auslegung und der sicherheitsrelevanten Fragestellung ist bei Krieg et al. [4] nachzulesen.

Die Ergebnisse dieses Groß-Experiments, dessen Durchführung für 1979 vorgesehen ist, sollen der Verifikation möglichst realistischer Rechenmodelle dienen. Eine realistische Betrachtungsweise erfordert aber - wie einfache Überlegungen in [4] zeigen - die Berücksichtigung der gekoppelten Fluid- und Strukturbewegung.



In dieser Arbeit wird ein entsprechendes Rechenprogramm FLUX (FLUId in fleXibler Struktur) vorgestellt. Von FLUX gibt es eine Version, die inkompressibles Fluid unterstellt (FLUX1) sowie die Version FLUX2 für kompressibles Fluid.

Mit FLUX werden die HDR-Experimente vorherberechnet (siehe § 6.3). Diese experimentell noch nicht verifizierbaren Ergebnisse liefern Kriterien für die Experimentauslegung. Darüber hinaus wird mit FLUX das RS16-DWR5-Experiment [2] von Battelle nachgerechnet (§ 6.4). Diese Ergebnisse bestätigen die Gültigkeit des Modells. Die mit FLUX durchgeführte Analyse eines DWR-Blowdown-Störfalls (§ 6.5) liefert schließlich unmittelbare Aussagen über die Sicherheit derartiger Reaktoren.

## 1.2 Der Modell-Aspekt

### 1.2.1 Das Problem

Zu modellieren sind das Fluid, die Struktur und deren Kopplung.

#### 1.2.1.1 Berechnung des Blowdown-Strömung.

Die Berechnung der Blowdown-Strömung eines DWR geht wie üblich von den Erhaltungsgleichungen für Masse, Impuls und Energie, zusammen mit entsprechenden Zustandsgleichungen aus. Schwierigkeiten hinsichtlich der numerischen Behandlung machen dabei

- in der Massenbilanz: die Kompressibilität des Fluids
- in der Impulsbilanz: die nichtlinearen Trägheitskräfte, die möglicherweise durch Turbulenz gekennzeichneten Reibkräfte
- in der Energiebilanz: die irreversiblen Prozesse
- in den Zustandsgleichungen: deren Nichtlinearitäten sowie das Auftreten von Zweiphasenströmungen (Wasser-Dampf)

Hinzu kommt die komplexe dreidimensionale Geometrie mit ihrem relativ breiten Spektrum charakteristischer Länge (beim HDR z.B.

Bruchstutzen-Radius  $R_S = 0.1$  m, Druckbehälter-Höhe ca. 11 m) und dem daraus resultierenden hohen Diskretisierungsaufwand. Zudem variiert der charakteristische Zeitmaßstab: Zu Beginn des Blow-downs sind Druckentlastungswellen zu verfolgen, die sich in Zeiten von 0.1 ms wesentlich ausbreiten. Etwas später kontrolliert die Trägheit der Wassermasse, insbesondere im Bruchstutzen, den Ablauf. Die charakteristische Beschleunigungszeit  $\tau$  liegt im Bereich von 5 bis 50 ms [8]. Die Zeit der einphasigen Entspannung bis zur Erreichung des Sättigungsdrucks liegt bei 50 bis 100 ms und die anschließende Zeit des Zweiphasenblowdowns kann mehrere Minuten umfassen.

#### 1.2.1.2 Berechnung der Struktur-Verformung

Im vorliegenden Fall interessiert vor allem das Verhalten des Kernmantels. Hierfür ist ein Schalen-Modell erforderlich, das im allgemeinen alle drei Verformungskomponenten als Funktion der axialen und azimuthalen Koordinaten  $(z, \varphi)$  sowie der Zeit beschreibt: Ein derartiges Modell basiert z.B. auf der Flügge'schen Schalentheorie [9], einem System von drei Differentialgleichungen vierter Ordnung oder entsprechenden Variationsprinzipien. Charakteristisch für Schalen ist, daß relativ viele Freiheitsgrade zur korrekten Beschreibung der Verformungen erforderlich sind. Nichtlinearitäten infolge nichtlinearen Materialverhaltens (plastisch), großer Verformungen oder Lagerungen mit Spiel und Anschlägen werden in der vorliegenden Arbeit entsprechend der Auslegung der HDR-Experimente [4] nicht berücksichtigt. Die Lösung dieses Teilproblems war nicht Ziel dieser Arbeit. Vielmehr wird auf dem CYLDY2-Modell [10] aufgebaut, das speziell für dieses Projekt entwickelt wurde.

#### 1.2.1.3 Erfassung der Fluid-Strukturkoppelung

Man muß zunächst unterscheiden zwischen Koppelungsproblemen mit großen und solchen mit kleinen Bewegungen der Strukturwände. Der erste Fall ist weitaus schwieriger zu behandeln, weil z.B. bezüglich der Fluidodynamik nicht nur die Randwerte, sondern eben

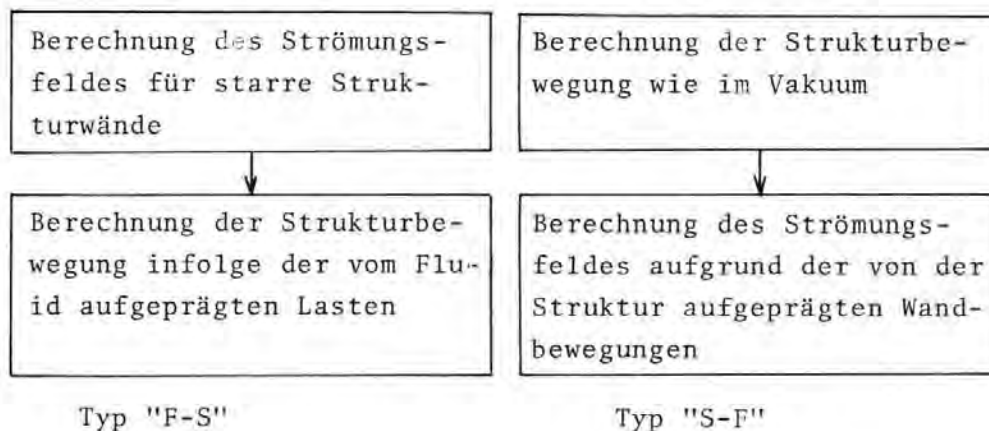
auch die Randorte als Funktion der Zeit erfaßt werden müssen. Dies erfordert zeitlich veränderliche Maschennetze, z.B. vom Lagrange-Typ. In dieser Arbeit werden kleine Verformungen angenommen und als Folge davon die Randbedingungen allein hinsichtlich Geschwindigkeit und Beschleunigung am unverformten Körper erfüllt.

Die Eigenschaften des gekoppelten Systems werden außer durch die Geometrie durch die Elemente folgender Matrix

Masse der Struktur	Masse des Fluids
Steifigkeit der Struktur	Steifigkeit des Fluids
Äußere Kräfte, die unmittelbar an der Struktur angreifen	Äußere Kräfte, die unmittelbar auf das Fluid wirken

(1-1)

bestimmt. Unter bestimmten Bedingungen kann die Reaktion des Systems in zwei aufeinanderfolgenden Rechnungen, getrennt für jedes Teilsystem, nach einem der folgenden Schemata ablaufen:



Beide Typen sind eine brauchbare Näherung, wenn die Strukturwand genügend starr ist, d.h., wenn - je nach Anregungsfrequenz - die Strukturmasse oder die Struktursteifigkeit gegenüber den Fluidparametern genügend groß ist.

Die Reihenfolge der entkoppelten Rechnung, also die Wahl zwischen den Typen "F-S" und "S-F", wird dabei durch die Art der Krafteinleitung bestimmt. Beim Blowdown-Problem scheidet deshalb der Typ "S-F" aus.

Im vorliegenden Fall ist jedoch eine entkoppelte Rechnung auch vom Typ "F-S" nicht zulässig, da die Strukturmasse und die Struktursteifigkeit nicht groß sind gegenüber den entsprechenden Fluidwerten.

Offen ist dabei noch die Frage, inwieweit die Koppelung voll dynamisch - also unter Berücksichtigung der Trägheitskräfte - oder quasistatisch - allein entsprechend den Lasten und Steifigkeiten berechnet werden kann. Maßgebend hierfür ist das Verhältnis der Schwingungszeiten des gekoppelten Systems zu den charakteristischen Zeiten der Laständerungen. Wir werden sehen, daß die maximalen Schwingungszeiten im 100 ms-Bereich liegen, während die charakteristischen Zeiten der Last (wie schon angedeutet) um 10 ms herum liegen. Dies spricht für die Notwendigkeit dynamischer Rechnungen.

Folgende Effekte können aus der Koppelung resultieren:

- a) Verlangsamung der Bewegungen durch Addition der Massen (virtuelle Fluidmasse) und der Nachgiebigkeiten.
- b) Verringerung der Verformungen durch trägere Reaktion auf Lastspitzen infolge der Addition der Massen.
- c) Verringerung der Verformungen durch Addition der Steifigkeiten (Stützwirkung des Wassers).
- d) Vergrößerung der Verformungen durch Verlagerung der System-eigenfrequenzen in den Bereich der Lastfrequenzen (Resonanz) oder umgekehrt.

- e) Vergrößerung der Verformungen durch selbsterregte Schwingungen. Mögliche Ursachen können sein: Wirbelablösung an Kanten [11, 12], Multi-Mode-Flattern [12, 13], Flattern infolge dynamischer Druckänderungen [13], Anregungen durch turbulente Druckschwankungen [11, 12]. Alle diese Anregungsmechanismen können nur bei großen Strömungsgeschwindigkeiten und genügend langer Anregungszeit wirksam werden. Einfache Abschätzungen (über die hier nicht berichtet wird) zeigen, daß selbstangeregte Schwingungen im vorliegenden Problem von untergeordneter Bedeutung sind.

Die Rechnungen werden zeigen, daß die Effekte a) und b) die wesentlichen sind.

Die Erfassung der Fluid-Strukturkoppelung ist im vorliegenden Fall zudem mit einem grundsätzlichen Problem verbunden, das aus der Verwendung unterschiedlich diskretisierter Modelle für die fluid- und strukturdynamischen Teile resultiert. Es ist sicherzustellen, daß die Koppelung sachgemäß formuliert ist. Dies ist notwendige Voraussetzung für ein stabiles Integrationsverfahren.

#### 1.2.2 Stand der Technik

Die Fluid-Struktur-Wechselwirkung ist für viele Fachgebiete wichtig und so finden sich zahlreiche Arbeiten zu diesem Gebiet in der Literatur. Einen gewissen Überblick geben Übersichtsaufsätze [14] sowie die Konferenz-Berichte über die Fluid-Struktur-Koppelung in Bauwerken [11] im Schiffsbau [15] und in der Reaktortechnik [16-18]. Im folgenden wird auf die hier speziell interessierenden Fragen eingegangen.

##### 1.2.2.1 Programme zur Analyse der Fluid-Struktur-Wechselwirkung bei Blowdown eines DWR

Für das spezielle Reaktorsicherheitsproblem lagen bisher keine Programme vor, die die Fluid-Strukturkoppelung berücksichtigten. Etwa seit 1975 jedoch wurde mit der Entwicklung derartiger Ver-

fahren in der Bundesrepublik Deutschland bei der Gesellschaft für Reaktorsicherheit (GRS) in München, der Kraftwerk-Union (KWU) in Erlangen und im Institut für Reaktorentwicklung (IRE) im Kernforschungszentrum Karlsruhe begonnen. In den USA laufen parallel ähnliche Entwicklungen in Los Alamos (LASL) und am Electric Power Research Institute (EPRI), Palo Alto [7].

Die Mehrzahl dieser Arbeiten sind bisher nicht abgeschlossen und veröffentlicht. Dem Verfasser sind nur zwei derartige Programme genauer bekannt geworden:

- a) STRUYA, entwickelt von Schlechtendahl und Mitarbeitern im IRE [19, 5].
- b) SOLA-FLX, entwickelt von Dienes, Hirt und Stein im LASL [20, 21].

STRUYA beschreibt die Strömung im Ringraum als ein abgewinkeltes ebenes Gebiet mit variabler Dicke. Es wird ein Differenzenverfahren benutzt, bei dem die (variable) Dicke des Ringraumes von einer Masche erfaßt wird ("2 1/2 dimensional"). Bezüglich des Modells für die Fluiddynamik und dieses Differenzenverfahrens wurde auf YAQUI [22] aufgebaut. Zweiphasenströmungen können unter der Annahme thermodynamischen Gleichgewichts erfaßt werden. Die Dynamik des Kernmantels wird (wie in FLUX) mit dem CYLDY2-Modell [10] beschrieben. Die gekoppelten Gleichungen erfassen das Druckfeld und die Schalenverformung implizit. Die Lösung dieser Gleichungen erfolgt zu jedem Zeitschritt nach einem Iterationsverfahren. Eine vorläufige STRUYA-Version enthielt einfachere Strukturmodelle mit nur einem Freiheitsgrad, die als Balkenmodell bzw. Kesselformelmodell bezeichnet wurden. Rechnungen mit diesen Modellen ergaben [19], daß die Fluid-Strukturkoppelung eine deutliche Verlangsamung der Bewegung sowie eine Reduzierung der maximalen Verformungen bewirkt. Erste Ergebnisse mit dem CYLDY2-Strukturmodell bestätigten diese Aussagen [7]. Ein besonderes Merkmal von STRUYA ist die Tatsache, daß bezüglich der Fluiddynamik große Schalenverformungen zugelassen sind.



SOLA-FLX gibt es in einer 2D- und einer 2 1/2 D-Version, wie bei STRUYA. Der Fluidodynamikteil basiert auf dem SOLA-DF-Modell [23] und erfaßt damit Zweiphasenströmungen im thermodynamischen Ungleichgewicht. Allerdings wurden die bisherigen Rechnungen mit Modell-Parametern erzielt, die thermodynamischem Gleichgewicht entsprechen. Die Fluid-Gleichungen werden nach der ICE-Technik [24] diskret und bezüglich des Druckfeldes implizit durch Iteration gelöst. Die Dynamik des Kernmantels wird mit einem expliziten Differenzenverfahren (FLX), basierend auf den Flüggeschen Differentialgleichungen, beschrieben. Da hier die Zeitschritte aus Stabilitätsgründen sehr klein bleiben müssen, erfolgt die Integration der strukturdynamischen Gleichungen über etwa zwanzigmal feinere Zeitschritte als die der fluidodynamischen Gleichungen.

In beiden Verfahren fehlte bisher ein Modell für den Bruchstutzen. Statt dessen wird an der Übergangsstelle Ringraum-Stutzen (und in den 2 1/2 D-Modellen auch am Übergang zum unteren Plenum) der Druck als Funktion der Zeit aufgrund anderer Rechnungen vorgegeben.

Genaue Angaben über Rechenzeiten fehlen bisher. Aufgrund persönlicher Mitteilungen liegen sie im Bereich mehrerer Stunden (IBM 370/168).

Bis etwa Ende 1976 hielt man deshalb dreidimensionale Rechnungen für zu aufwendig, obwohl man einsah, daß gewisse Bereiche wie der Übergang Stutzen-Ringraum oder die Wirkung des Innenraums wohl nur dreidimensional erfaßt werden können. Dies war einer der Ansatzpunkte von FLUX, nämlich durch Abstriche am Modell und Verwendung effektiverer numerischer Verfahren diese Lücke zu schließen. Über erste vorläufige FLUX-Ergebnisse und die geplante Entwicklung wurde auf Konferenzen berichtet [5, 7]. Etwa seit 1977 arbeitet man nun auch im LASL an einer 3D Erweiterung von SOLA-FLX (genannt "K-FIX (3D, FLX)") und erste Ergebnisse liegen vor [25].

STRUYA wurde bisher nicht an Experimenten verifiziert. Mit SOLA-FLX wurden spezielle "achsensymmetrische" Blowdown-Experimente im Labormaßstab nachgerechnet. Die Übereinstimmung ist nur mäßig gut, was zum Teil an experimentellen Schwierigkeiten liegt [26].

#### 1.2.2.2 Verfahren für Potentialströmungen

Unter der Annahme von einphasiger Potentialströmung mit konstanter Schallgeschwindigkeit und kleinen Fluidgeschwindigkeiten läßt sich (wie in Anhang 1 gezeigt) das Druckfeld  $p$  durch die lineare Wellengleichung ( $\alpha$  = Schallgeschwindigkeit)

$$\frac{1}{\alpha^2} \ddot{p} - \text{div grad } p = 0 \quad (1-2)$$

mit der Neumann-Randbedingung

$$\underline{n} \cdot \text{grad } p = - \varrho \underline{n} \cdot \ddot{\underline{w}} \quad (1-3)$$

an Wänden ( $\varrho$  = Fluidichte,  $\underline{w}$  = Strukturverformung,  $\underline{n}$  = Normalenvektor) beschreiben (sog. akustische Approximation) [27].

Zusammen mit linearen Schalenmodellen kann diese Differentialgleichung oft analytisch oder halb-analytisch (in Form von Reihenentwicklungen) gelöst werden. Beispiele hierfür sind in der Literatur zahlreich zu finden, z.B. [27-39].

Beschränkt man sich weiter auf inkompressible Fluide ( $\alpha = \infty$ ), so macht sich das Fluid allein durch Vergrößerung der Masse des schwingenden Systems bemerkbar. Da die Größe, mit der die Fluidmasse in die Schwingungsmasse eingeht, von der Schwingungsform und Geometrie des Fluidraumes abhängt und auch größer als die tatsächliche Fluidmasse sein kann, spricht man von der virtuellen Fluidmasse [40, chapt. VI].

Beispielsweise ist die virtuelle Fluidmasse einer Kugel (Radius  $R$ ) im unendlichen Fluid (Dichte  $\varrho$ ) gleich  $\frac{2}{3} \pi \varrho R^3$ ;



bei einem Kreiszylinder (Radius  $R$ ) ist bei Beschleunigung senkrecht zur Zylinderachse die virtuelle Massenbelegung  $\pi \rho R^2$  falls er sich im unendlichen Raum bewegt. Ist er dagegen von einem konzentrischen Zylinder mit Radius  $R_a$  umgeben, so beträgt die Massenbelegung  $\pi \rho R^2 (R_a^2 + R^2) / (R_a^2 - R^2)$  (als "Stokes Formel" bekannt; siehe [41]) und kann also für kleine Spaltweiten  $R_a - R$  wesentlich größer als die tatsächliche Fluidmasse pro Längeneinheit sein.

Bei einem schwingungsfähigen System mit mehreren Freiheitsgraden ist im allgemeinen einerseits die virtuelle Masse für jeden Freiheitsgrad verschieden, andererseits wird über die Fluidbeschleunigung eine Verkoppelung der verschiedenen Freiheitsgrade hervorgerufen. Diese Zusammenhänge beschreibt die virtuelle Massenmatrix.

Da man Gleichung (1-2) für inkompressibles Fluid relativ einfach mit einer Vielzahl numerischer Verfahren, wie mit finiten Elementen [42-44], Panel-Methoden [45-46] oder finiten Differenzen (so z.B. in FLUX) lösen kann, gibt es hier zahlreiche numerische Untersuchungen, z.B. [47-51]. Ein Verfahren, das nach der Panel-Methode (auch "boundary-integral-equation method" oder "Singularitätenverfahren" genannt) arbeitet und relativ flexibel in den möglichen Randgeometrien ist, wurde kürzlich von Krieg und Hailfinger vorgestellt [52].

Ein Grund, warum nicht eines dieser vorhandenen Verfahren hier unmittelbar übernommen werden kann, ist die Komplexität und Dreidimensionalität der Geometrie, bei der analytische Verfahren nicht zum Ergebnis führen und vorhandene numerische Methoden sehr aufwendig sind. Ein weiterer Grund bestand in dem Ziel, vorhandenes know-how auf dem Gebiet schneller elliptischer Löser hier verfügbar zu machen.

### 1.2.2.3 Bedeutung nichtlinearer Effekte

Je weitgehender nichtlineare Effekte vernachlässigt und eliminiert werden können, umso einfacher gestalten sich Rechnungen. Diese triviale Erfahrung wird vom Erfolg der akustischen Approximation in vielen Fällen belegt. Jedoch bei der DWR-Blowdown-Strömung kann die nichtlineare Trägheit des Fluids nicht vernachlässigt werden. Diese Tatsache, die den mit Blowdown-Rechnungen vertrauten Fachleuten selbstverständlich ist, soll kurz begründet werden:

Der Umsetzungsprozess potentieller Druckenergie<sup>+) (p<sub>0</sub> - p<sub>1</sub>) in kinetische Strömungsenergie<sup>+) E =  $\frac{1}{2} \rho \int u^2$  begrenzt die Ausströmgeschwindigkeit. Der dadurch bestimmte Maximalwert von  $u$  liegt bei den vorliegenden Bedingungen in der Größenordnung 100 m/s und damit deutlich unterhalb der Schallgeschwindigkeit des unterkühlten Fluids ( $\alpha \approx 1000$  m/s). Bei einer Verengung gemäß Abb. 1-3 mit konstanter Druckdifferenz und Beschleunigung aus der Ruhe heraus</sup></sup>

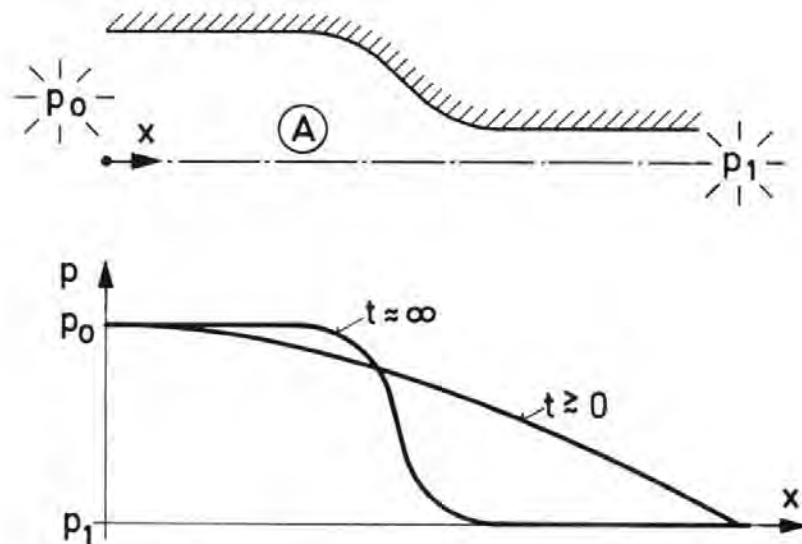


Abb. 1-3 Druckprofil zu Beginn und am Ende der Beschleunigungsphase

<sup>+) pro Volumeneinheit des Fluids</sup>

bildet sich zur Zeit  $t=0$  ein Druckgradient aus, der der lokalen Beschleunigung  $\rho \frac{d\mathbf{u}}{dt}$  entspricht. Später stellt sich ein Druckgradient entsprechend der stationären konvektiven Beschleunigung  $\rho(\mathbf{u} \cdot \nabla)\mathbf{u}$  ein. Das hat zur Folge, daß an einer Stelle  $A$  der Druck später höher ist als zu Beginn der Beschleunigungsphase. Solch eine Stelle ist beim Reaktor die Kernmantelaußenwand gegenüber der Stutzenöffnung, siehe Abb. 1-4. Hier bewirkt die nichtlineare konvektive Beschleunigung also eine Verringerung der am Kernmantel angreifenden Last.

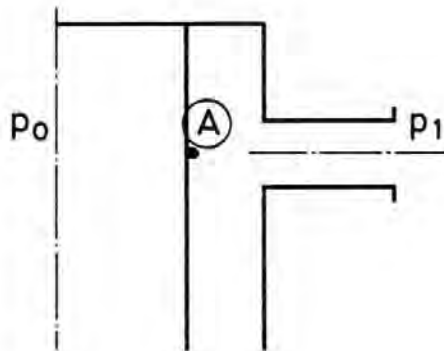


Abb. 1-4

Verengung mit starker konvektiver Beschleunigung am Stutzen.

Dieser Effekt ist bereits verschiedentlich in analytischen [8], numerischen [19, 53] und experimentellen Untersuchungen [53] festgestellt worden. Bei rotationsfreier Strömung ist  $(\mathbf{u} \cdot \nabla)\mathbf{u} = \text{grad} \left( \frac{1}{2} \mathbf{u}^2 \right)$ , weswegen also die kinetische Energie  $E = \frac{1}{2} \rho \mathbf{u}^2$  nicht vernachlässigt werden kann und das numerische Verfahren zumindest diese Nichtlinearität erfassen muß.

### 1.2.3 Vorgehensweise in dieser Arbeit

Die Programme FLUX1 und FLUX2 wurden nach folgenden Gesichtspunkten entworfen:

- a) Erfassung der Dreidimensionalität der Geometrie

b) Erfassung der Fluid-Strukturkoppelung bei Annahme kleiner Verformungswege

c) Erreichen möglichst kurzer Rechenzeiten durch

- Verwendung der SEL (siehe § 1.3)
- Reduzierung auf die wichtigsten fluiddynamischen Vorgänge und
- Verwendung eines effektiven (vorhandenen) Schalenmodells

Die Einzelheiten der hierzu angenommenen Vereinfachungen und der eingesetzten Methoden werden in § 2 beschrieben. Die wichtigsten Vereinfachungen sind:

- rotationsfreie Strömung
- einphasig, konstante Stoffwerte, insbesondere konstante Schallgeschwindigkeit (bei FLUX1: inkompressibel)
- linear-elastisches Schalenmodell nach Art des CYLDY2-Modells [10].

Diese Annahmen sind während der unterkühlten Anfangsphase des Blowdowns ( $\leq 100$  ms) in erster Näherung zutreffend. Im Prinzip ist jede dieser Annahmen vermeidbar, wenn aufwendigere Methoden verwendet werden können. Insofern führen diese Annahmen also nicht in eine Sackgasse.

Die Sachgemäßheit der verwendeten Koppelung wird ausführlich diskutiert in § 3, wobei einige grundlegende allgemeine Bedingungen gefunden werden.

### 1.3 Der numerische Aspekt

#### 1.3.1 Das Problem

##### 1.3.1.1 Notwendigkeit impliziter Zeitintegration

Wenn das gekoppelte Fluid-Struktur-System mit expliziten Differenzenverfahren in der Zeit integriert wird, dann muß (wie leicht gezeigt werden kann, siehe Anhang 2) der Zeitschritt  $\Delta t$  aus Stabilitätsgründen kleiner als  $2/\omega_{\max}$  sein, wobei  $\omega_{\max}$  die maximale Eigenfrequenz des Systems ist. Hier soll zunächst gezeigt werden, daß diese Einschränkung beim gekoppelten System wesentlich kleinere Zeitschritte bedingt als beim entkoppelten und daher explizite Verfahren für das gekoppelte System praktisch ausscheiden. Wir betrachten hierzu das in Abb. 1-5 skizzierte Modellproblem.

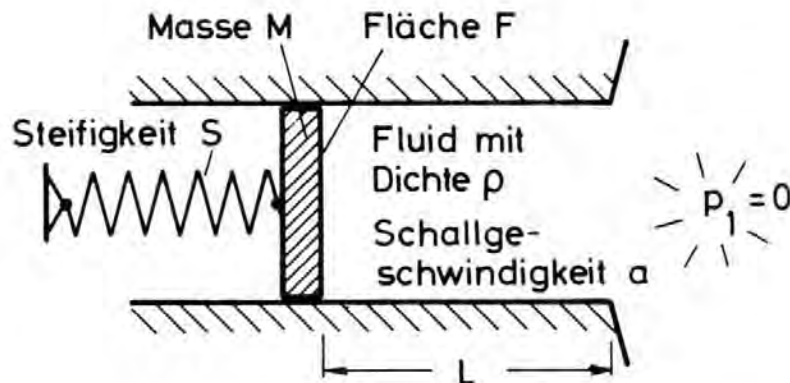


Abb. 1-5 Modellproblem: Rohr mit elastisch aufgehängtem Kolben

Es sollen die akustischen und linear-elastischen Gleichungen für den Druck  $p$  und die Verformung  $w$  gelten:

$$\frac{1}{\alpha^2} \ddot{p} - \frac{\partial^2 p}{\partial x^2} = 0 \quad (1-4a)$$

$$\left. \frac{\partial p}{\partial x} \right|_w = - s \ddot{w} \quad (1-4b)$$

$$M \ddot{w} + S w = - F p|_w \quad (1-4c)$$

(Index  $|_w$  für Werte an der flexiblen Wand). Im Sinne einer Differenzenapproximation oder Größenordnungsbetrachtung ersetzen wir

$$\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} \approx \frac{1}{L} \left( \frac{p_0 - p}{L} - \left. \frac{\partial p}{\partial x} \right|_w \right)$$

$$p|_w \approx p$$

und erhalten (mit  $p_0 \equiv 0$ )

$$\frac{1}{\alpha^2} \ddot{p} + \frac{1}{L^2} p = \frac{s}{L} \ddot{w}$$

$$M \ddot{w} + S w = - F p. \quad (1-5)$$

Bei entkoppelter Rechnung sind die Eigenfrequenzen der Fluid- und Strukturschwingung,  $\omega_F$  und  $\omega_S$ , gegeben durch

$$\omega_F^2 = \frac{\alpha^2}{L^2},$$

$$\omega_S^2 = \frac{S}{M}. \quad (1-6)$$

Die Eigenfrequenzen des gekoppelten Systems sind dagegen

$$\omega_{1/2}^2 = \frac{1}{2} \left\{ \left[ m \omega_F^2 + \omega_S^2 \right] \pm \sqrt{\left[ m \omega_F^2 + \omega_S^2 \right]^2 - 4 \omega_F^2 \omega_S^2} \right\}, \quad (1-7)$$

wobei

$$m \equiv \frac{M + sFL}{M} \quad (1-8)$$

das Verhältnis der Gesamtmasse zur Strukturmasse ist. Neben einer reduzierten Eigenfrequenz  $\omega_1$  (Minus-Zeichen) hat das gekoppelte System eine Eigenfrequenz  $\omega_{max} = \omega_2$  (Plus-Zeichen), die stets größer als das Maximum von  $\omega_F$  und  $\omega_S$  ist. Insbesondere ist  $\omega_{max}^2 \gg \omega_S^2$ , falls

$$- \quad \omega_F^2 \gg \omega_S^2,$$

d.h. bei "fast" inkompressiblem Fluid oder weicher Struktur

$$- \quad m \gg 1,$$

d.h. bei großer (virtueller) Fluidmasse bzw. leichter Struktur.

Genau diese Bedingungen sind aber bei dem vorliegenden Problem gegeben. Zudem ist  $\omega_S$  schon selbst sehr groß (Kesselformel liefert z.B. beim HDR eine Eigenfrequenz  $\omega_S$  von ca. 3000 Hz). Aus diesen Gründen muß das gekoppelte System mit impliziten Zeitintegrationsverfahren behandelt werden, die unbedingt stabil sind.

#### 1.3.1.2 Gleichungsstruktur und Anwendbarkeit schneller elliptischer Löser

Das unter den in § 1.2.3 angedeuteten Gesichtspunkten abgeleitete Modell liefert zunächst ein System hyperbolischer Gleichungen für das Fluid und ein System gewöhnlicher Differentialgleichungen für die Struktur. Bei impliziter Diskretisierung der Zeitableitungen sind zu jedem Zeitschritt für das Druck- und Potentialfeld partielle Gleichungen vom (elliptischen) Typ der Helmholtz-Gleichung

$$\operatorname{div} \operatorname{grad} p - \lambda^2 p = q(x, t) \quad (1-9)$$

zu lösen. An Öffnungen sind die Randbedingungen vom Dirichlet-Typ. An Wänden sind sie vom Neumann-Typ und stellen die Verbindung zu dem linearen Gleichungssystem für die Strukturverformung zum neuen Zeitschritt her. Für das Druckfeld ist  $\lambda^2$  proportio-



nal zu  $1/(\alpha \Delta t)^2$ ,  $\Delta t$  = Zeitschritt. Im Falle des Potentialfeldes ist  $\lambda^2 = 0$ ; man nennt Gl. (1-9) dann eine Poisson-Gleichung. Weiter ist unter bestimmten Bedingungen die "Quellverteilung"  $q(x, t)$  gleich Null, in welchem Fall man von der Laplace-Gleichung spricht.

Nach Diskretisierung, auch bezüglich des Ortes, entsteht aus Gl. (1-9) ein lineares Gleichungssystem, das in der Regel viele tausend Unbekannte umfaßt.

Wenn das betrachtete Fluidgebiet ein zweidimensionales Rechteck wäre, dann könnte das resultierende Gleichungssystem unmittelbar sehr effektiv und direkt (d.h. mit endlich vielen Rechenschritten exakt bis auf Rundungsfehler - im Gegensatz zu iterativ) mit Hilfe sogenannter "Fast Elliptic Solver" (auch "Fast Poisson Solver" genannt [54-56]) gelöst werden [3]. Es wird vorgeschlagen, für diese Verfahren die vielleicht nicht sonderlich schöne, aber knappe, direkte deutsche Übersetzung "schneller elliptischer Löser" oder die Abkürzung SEL zu verwenden. Zur Lösung der Helmholtz-Gleichung auf nicht rechteckigen zweidimensionalen Gebieten können SEL mit Hilfe der "Capacitance-Matrix-Technique", hier "Einfluß-Matrix-Technik", abgekürzt EMT, genannt, eingesetzt werden [57]. Vom Prinzip her sind diese Techniken unmittelbar auf dreidimensionale Fälle anwendbar. Allerdings ist auch bekannt, daß die Effektivität dieser Technik mit zunehmender Unregelmäßigkeit der Umrandung des Gebietes schnell abnimmt. Für den Einsatz des SEL besteht das Problem also

- a) in der praktischen Realisierung eines SEL für die gegebene Reaktorgeometrie, der trotz der inneren Einbauten und des angesetzten Stützens noch deutlich schneller als iterative Verfahren sein soll.

Für  $\lambda^2 \gg 1$ , d.h. für kleine Zeitschritte, werden iterative Verfahren sehr effektiv, während die üblichen SEL in ihrer Effektivität von  $\lambda^2$  unabhängig sind. Um auch bei kleinen Zeitschritten überlegen zu sein, sind die SEL entsprechend abzuwandeln.



- b) in der simultanen Lösung des linearen Gleichungssystems, das die Strukturdynamik beschreibt und das mit den Gleichungen für das Strömungsfeld gekoppelt ist.

### 1.3.2 Stand der Technik

In der großen Mehrzahl der Fluidodynamik-Programme werden lineare Gleichungssysteme, insbesondere bezüglich des Druckfeldes, mit einfachen Punkt-Iterations-Methoden gelöst [22, 24, 60]. Hierfür gibt es gute Gründe, wie Flexibilität der Programme oder fehlende Voraussetzungen für den Einsatz der SEL. Häufig scheint aber auch das mangelnde Wissen um die Existenz direkter schneller Verfahren oder die fehlende Verfügbarkeit der Grund zu sein.

#### 1.3.2.1 Schnelle elliptische Löser (SEL)

Unter einem SEL [3] versteht man ein Rechenverfahren, mit dem blocktridiagonale Gleichungssysteme der Art  $\mathbf{x}$ )

$$\begin{bmatrix} A & I & & \\ I & A & I & \\ & \cdot & \cdot & \cdot \\ & & I & A \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \cdot \\ u_N \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \cdot \\ v_N \end{Bmatrix} \quad (1-10)$$

(bestehend aus  $N$  Blöcken zu je  $M$  Zeilen mit  $I$  der  $M \times M$ -Einheitsmatrix,  $A$  einer tridiagonalen  $M \times M$ -Matrix,  $v_j$  den Vektoren der gegebenen "Quellen" und  $u_j$  den Vektoren der gesuchten Lösungen; die gesamte Matrix ist zumindest positiv semi-definit) direkt und mit einem Rechenaufwand, der für große Werte von  $M$  und  $N$  maximal wie  $MN \log N$  ansteigt, lösen kann. Die Bezeichnung "elliptisch" erklärt sich hierbei aus der Tatsache, daß derartige Gleichungssysteme bei Verwendung finiter Differenzen aus der elliptischen Differentialgleichung

$\mathbf{x}$ ) abweichend von der sonst verwendeten Nomenklatur wird hier auf Unterstreichungen von Vektoren und Matrizen verzichtet.

$$a(x) \frac{\partial}{\partial x} \left( b(x) \frac{\partial u}{\partial x} \right) + c(x) u + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = v(x, y)$$

$$a(x) > 0, \quad b(x) > 0, \quad c(x) \leq 0 \quad (1-11)$$

auf einem zweidimensionalen rechteckigen Gebiet mit bestimmten Randbedingungen resultieren.

Zum Vergleich: bei Gauss-Seidel-Iteration steigt der Rechenaufwand wie  $M^2 N^2$  [54], bei dem klassischen direkten Gauss-Eliminationsverfahren unter Beachtung der Blockstruktur wie  $NM^3$ , wobei dieses Verfahren einen besonders großen Speicherplatzbedarf (von der Ordnung  $NM^2$ ) hat [54].

Die überlegene Effektivität der SEL resultiert aus der Verwendung besonders ausgefeilter Algorithmen (wie schneller Fourier Transformation, FFT, [56] oder zyklischer Reduktion [55, 58]), die jedoch nur für eine enge Klasse von Gleichungssystemen anwendbar sind, nämlich die Klasse der Gleichungssysteme, die eine Separierung der Lösung erlauben [3]. Diesen Begriff kannte man bisher vornehmlich für partielle Differentialgleichungen. So erlaubt beispielsweise die Differentialgleichung

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - \lambda^2 u = v(x, y) \quad (1-12)$$

auf einem Rechteckgebiet mit Dirichlet-Randbedingungen den Separierungsansatz  $u(x, y) \sim \varphi(x) \cdot \psi(y)$ , während dies bei am Rande variierenden Randbedingungstypen, nicht rechteckigen Gebieten oder für geringfügig veränderte Differentialgleichungen, z.B. der Art

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( \mu(x, y) \frac{\partial u}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \mu(x, y) \frac{\partial u}{\partial y} \right) - \lambda^2(x, y) u$$

$$= v(x, y), \quad (1-13)$$

nicht mehr möglich ist. Genau die gleichen Eigenschaften findet man bei den linearen Gleichungssystemen wieder, die durch Diskretisierung dieser Differentialgleichungen entstehen. Für die Se-

parierbarkeit der diskreten Lösung ist zusätzlich ein rechteckiges Maschennetz Bedingung. Bei den meisten SEL ist außerdem Bedingung, daß die Maschenweiten zumindest in einer Richtung äquidistant gewählt werden.

#### 1.3.2.2 Einfluß-Matrix-Technik (EMT)

Nun gibt es eine wichtige, algebraisch begründete Technik, die sogenannte EMT, mit deren Hilfe auch solche Gleichungssysteme mit einem SEL effektiv gelöst werden können, die in einer relativ kleinen Zahl  $m$  von Gleichungen der insgesamt  $n \sim M \times N$  Gleichungen von den unmittelbar mit einem SEL lösbaren Gleichungssystem abweichen [57]. Solche Gleichungssysteme mit "unregelmäßigen" Gleichungen entstehen insbesondere, wenn in dem betrachteten Rechteck innere Einbauten oder lokal andersartige Randbedingungen auftreten. Dann haben nämlich die Differenzengleichungen für alle Maschen die gleiche Struktur wie für das einfache Rechteck, mit Ausnahme für die Maschen, die solchen Einbauten oder Rändern benachbart sind. In solchen Fällen kann man das "unregelmäßige Problem", das wir "A-Problem" nennen wollen, dadurch lösen, daß man zweimal das "regelmäßige", das "B-Problem", löst. Dabei wird nach der ersten Lösung des B-Problems aufgrund der nicht verschwindenden Residuen die Quellverteilung entsprechend einer Einflußmatrix korrigiert und hierfür bei der zweiten B-Problem-Lösung die gesuchte Lösung erhalten. Die Bestimmung der  $m \times m$  Einflußmatrix  $C$  selbst erfordert eine Vorbereitungsrechnung in der  $m$  B-Probleme zu lösen sind. Deshalb kann dies Verfahren auch nur für  $m \ll n$  effektiv sein. Die Vorbereitungsrechnung fällt kaum ins Gewicht, wenn viele A-Probleme mit verschiedenen Quellverteilungen zu lösen sind, da die Einflußmatrix nicht von den Quellverteilungen abhängt. Eine formale Ableitung dieser EMT ist in § 4.3 gegeben.

Mit dem Einsatz von SEL in Kombination mit der EMT hat man für zweidimensionale Probleme gute Erfahrungen gesammelt. So konnte das für inkompressible Strömungen

mit freien Oberflächen erstellte Programm REMAC [59], das auf der SMAC-Technik basiert [60], bei zeitlich konstanter Randgeometrie um etwa den Faktor zehn schneller gemacht werden [61]. Auch bei der Umströmung von Tragflügeln [62] und der Berechnung von Potentialströmungen in Rohrerweiterungen [8] wurde es erfolgreich eingesetzt. Martin [62] hat bei der Berechnung der Umströmung von Tragflügeln eine zusätzliche Gleichung, die Kutta-Bedingung, zur Bestimmung der Zirkulation in das Lösungsverfahren eingeschlossen und spricht hier von einer verallgemeinerten EMT. Die Verallgemeinerung bezieht sich hierbei auf die Tatsache, daß nicht nur unregelmäßige Differenzenformeln berücksichtigt werden. In diesem Sinne wird auch in der vorliegenden Arbeit die EMT zu verallgemeinern sein, da strukturdynamische Gleichungssysteme mit zu lösen sind.

Neuerdings hat Temperton [63] gezeigt, daß zur Lösung eines A-Problems einige der Rechnungen bei Lösung der B-Probleme überflüssig sind, weil sie in beiden Teillösungen genau gleich auftreten. Bei Elimination dieser überflüssigen Rechnungen, die von dem jeweils verwendeten SEL abhängen, kann die Effektivität des Lösungsverfahrens um bis zu 40 % verbessert werden. Auch diese Technik wird hier zu berücksichtigen sein.

### 1.3.3 Vorgehensweise in dieser Arbeit

Nachdem die Modellgleichungen, die Geometrie und die Diskretisierung im Hinblick auf den Einsatz des SEL gemäß § 1.2.3 festgelegt sind, werden folgende Techniken eingesetzt bzw. entwickelt:

- a) Das dreidimensionale (3D) Behälterproblem ist zunächst nicht separierbar wegen des am Druckbehälter angesetzten Stutzens. Wenn man vorerst den Stutzen außer acht läßt, dann kann die Lösung durch eine Kosinustransformation in eine Reihe zweidimensionaler (2D) Probleme separiert werden. Für diese Kosinustransformation werden numerisch effektive Algorithmen wie Schnelle Fourier Transformation oder Runge Faltung (siehe §4.1) eingesetzt.

- b) Der für 2D Gebiete mit Neumann-Randbedingungen entwickelte SEL POISSN [64] wurde auf andere Randbedingungen erweitert, mit einer abgebrochenen zyklischen Reduktionstechnik nach Buzbee [55, 65] für große Werte der Helmholtz-Parameter  $\lambda^2$  versehen und in PL/1 bzw. teilweise Assembler umprogrammiert. Das resultierende Programm POISTP, von dem bisher nur Teilaspekte veröffentlicht wurden [3, 61], wird im Anhang 5 beschrieben.
- c) Die EMT wird auf zwei Ebenen eingesetzt: zunächst wird das nicht separierbare "3D-A-Problem" gelöst durch zweimaliges Lösen eines separierbaren "3D-B-Problems", das hinsichtlich der Übergangsbedingungen Ringraum-Stützen abweicht. Das so gebildete 3D-B-Problem läßt sich mittels Kosinus-Transformation in ein System von entkoppelten "2D-A-Problemen" überführen. Jedes dieser 2D-A-Probleme entspricht der Lösung der Helmholtz-Gleichung auf einem 2D Gebiet mit inneren Einbauten, von denen einige aus flexiblen Wänden bestehen. Hier wird die EMT ein zweites Mal eingesetzt. Als "2D-B-Problem" wird ein Gleichungssystem definiert, bei dem zunächst die Struktur-Gleichungen, dann die Fluid-Gleichungen auf vier einzelnen Rechtecken sukzessiv mittels POISTP gelöst werden können. Die EMT korrigiert dann hinsichtlich der Rand- und Übergangsbedingungen. Schließlich wird bei den Einflußmatrizen die aus großen Helmholtz-Parametern  $\lambda^2$  resultierende Diagonaldominanz zu einer Steigerung der Effektivität in Form einer neuartigen "abgebrochenen EMT" ausgenutzt. Einzelheiten dieser Vorgehensweise finden sich in § 4.4 und 4.5. Vorläufige Arbeiten in dieser Richtung sind in [66] beschrieben.
- d) Damit in diesem Zusammenhang auch die strukturdynamischen Gleichungen schnell gelöst werden können, wird eine Hauptachsentransformation [67] benutzt, so daß die zu invertierenden Matrizen Diagonalform annehmen; siehe Anhang 4.

Weitere numerische oder programmtechnische Aspekte, wie eine Dreiecksmatrixzerlegung für Bandmatrizen bezüglich der Einflußmatrizen, eine dynamische Datenverwaltung (die allerdings unter dem neuen IBM-Betriebssystem MVS weitgehend überflüssig wurde) sowie Erstellung graphischer Ausgaben auf Zeichnungen oder in Filmen mit dem (zusammen mit Herrn W. Olbrich erstellten) Programm FLUXPLOT seien nur am Rande erwähnt. FLUX ist in der Programmiersprache PL/1 programmiert, deren Vorteile gegenüber Fortran hier deutlich zu Tage traten.



## 2. DIE MODELL-GLEICHUNGEN UND IHRE DISKRETISIERUNG

### 2.0 Übersicht

In diesem Kapitel werden zunächst die Voraussetzungen und das resultierende hyperbolische Differentialgleichungssystem beschrieben (§2.1 - 2.3). Durch finite Differenzen in der Zeit wird das Problem in § 2.4 auf die Lösung einer Folge elliptischer Gleichungen reduziert. Durch räumliche Diskretisierung entsteht schließlich ein System algebraischer Gleichungen, das zu jedem Zeitschritt zu lösen ist (§ 2.5 - 2.7).

Vor allem wegen der komplexen Geometrie sind viele Einzelheiten zu beschreiben, die teilweise in den Anhängen 1 bis 3 detailliert sind.

### 2.1 Voraussetzungen

Entsprechend den in § 1.2 und 1.3 dargestellten Überlegungen werden eine Reihe von Voraussetzungen getroffen, die den Einsatz von SEL unmittelbar möglich machen. In Anhang 9 wird kurz erläutert welche Erweiterungen möglich und erforderlich sind, wenn sich einzelne Annahmen als nicht akzeptabel erweisen sollten.

- A1) Das Geschwindigkeitsfeld  $\underline{u}$  sei rotationsfrei, also darstellbar als Gradient eines Potentials  $\Phi$ ,

$$\underline{u} = \text{grad } \Phi. \quad (2-1)$$

Hiermit wird also die Wirkung von Zähigkeitskräften vernachlässigt, was in der stark beschleunigten Anfangsphase des Blowdown weitgehend gerechtfertigt erscheint. Lediglich im engen Stutzen werden Reibungskräfte wesentlich sein. Diese können in Form linearer innerer Reibung ( $-\alpha \underline{u}$ ) näherungsweise mit einem empirischen Koeffizienten  $\alpha$  berücksichtigt werden.

- A2) Die Schallgeschwindigkeit  $\alpha$  sei konstant und die Zustandsänderungen seien isotherm, so daß zwischen Druck  $p$  und Dichte  $\rho$

$$(p - p_0) = \alpha^2 (s - s_0) \quad (2-2)$$

als lineare Zustandsgleichung gelte. Diese Annahme gilt ebenso wie die folgende für unterkühltes Wasser in brauchbarer Näherung. (Im Bereich  $5 \text{ MPa} \leq p \leq 11 \text{ MPa}$ ,  $200^\circ\text{C} \leq T < T_{\text{satt}}(p)$  hat die Schallgeschwindigkeit von Wasser den Wert  $\alpha = (1083 \pm 277) \text{ m/s}$  [70].)

- A3) Die maximale Geschwindigkeit des Fluids  $u_{\text{max}}$  sei klein gegenüber der Schallgeschwindigkeit. Tatsächlich ist

$$u_{\text{max}} \approx \sqrt{2(p_0 - p_1)/\rho} \approx 100 \text{ m/s} \ll \alpha \approx 1000 \text{ m/s}.$$

Weitere Annahmen in FLUX beziehen sich auf das Strukturmodell und die Koppelung.

- A4) Die elastische Struktur sei rotationssymmetrisch, so daß die Verformung als Produkt aus axialen und azimutalen Formfunktionen dargestellt werden kann. Ist diese Voraussetzung verletzt, so wird der numerische Aufwand größer, das Verfahrensprinzip bleibt aber anwendbar.

- A5) Das Strukturmechanik-Modell sei linear-elastisch.

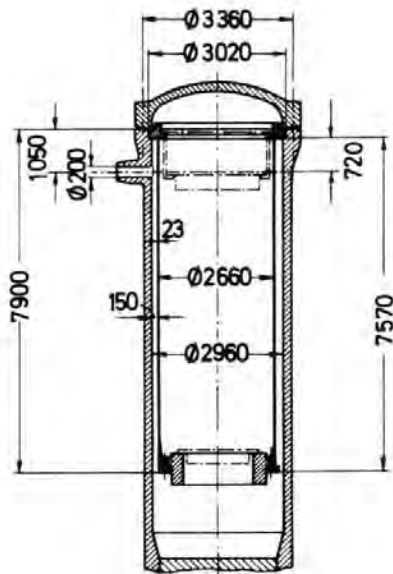
Bezüglich der Koppelung der Struktur mit dem Fluid wird einerseits die Druckdifferenz infolge des Fluiddruckfeldes in den modalen Lasten  $g$  und andererseits die Wirkung der Struktur-Normalbeschleunigung und Normalgeschwindigkeit auf das Strömungsfeld berücksichtigt. Jedoch:

- A6) Eine Koppelung über die tangentialen Bewegungen wird außer acht gelassen (notwendig bei Potentialströmung).

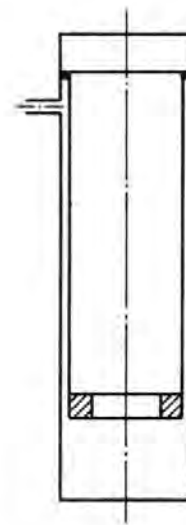
- A7) Die Änderung der Fluidgeometrie infolge der Strukturverformung  $\underline{n} \cdot \underline{w}$  wird vernachlässigt.



Annahme A7) ist gerechtfertigt, wenn die maximalen Strukturverformungen klein sind gegenüber der charakteristischen Breite des Fluidbereichs, hier also klein gegenüber der Spaltbreite  $H_R$  des Ringraumes. Die Ergebnisse werden zeigen, daß die maximalen Verformungen tatsächlich nur etwa 1 % der Spaltbreite ausmachen.



HDR -  
Versuchsanordnung



dreidimensionales  
Flux-Modell

Abb. 2-1: Vergleich HDR- und FLUX-Geometrie

Schließlich sind hinsichtlich der Geometrie für einen Einsatz der SEL Konzessionen zu machen:

- A8) Die Kesselumrandung und die Form der Einbauten sei durch ein möglichst einfaches Rechteckschema approximierbar sowie spiegelsymmetrisch zur Ebene durch Kessel- und Rohrachse.

Abb. 2-1 zeigt, daß zumindest beim HDR diese Vereinfachung vertretbar ist. Die Symmetriebedingung hat keine prinzipiellen, wohl aber programmtechnische Auswirkungen.

Alle diese Annahmen wurden getroffen im Hinblick auf ein möglichst effektives numerisches Verfahren. Ihre Rechtfertigung erfolgt teilweise durch Argumente, wie angedeutet oder aufgrund von Größenordnungsaussagen mit dimensionslosen Kennzahlen (siehe Anhang 7), letztlich aber durch den Vergleich mit einem Experiment oder mit anderen Rechenmodellen, die diese Annahmen nicht benutzen.

## 2.2 Die Fluidodynamik-Gleichungen

Die Fluid-Modellgleichungen, entsprechend obiger Annahmen, sind in Anhang 1 abgeleitet. Das Ergebnis ist folgender Satz von Differentialgleichungen für das Druck- und Potentialfeld ( $\rho_0$  = Ausgangsdichte,  $\alpha$  = Schallgeschwindigkeit,  $\kappa$  = Reibkoeffizient,  $p$  = Druck,  $E$  = spezifische kinetische Energie,  $\Phi$  = Potential,  $\underline{w}$  = Strukturverformung,  $\underline{n}$  = Normalenvektor zur Wand)

$$\frac{1}{\alpha^2} (\ddot{p} + \kappa \dot{p}) - \operatorname{div} \operatorname{grad} p = \operatorname{div} \operatorname{grad} E \quad (2-3)$$

$$\operatorname{div} \operatorname{grad} (\dot{\Phi} + \kappa \Phi) = - \frac{1}{\rho_0 \alpha^2} (\ddot{p} + \kappa \dot{p}) \quad (2-4)$$

mit den Randbedingungen

$$\underline{n} \cdot \operatorname{grad} p = - \rho \underline{n} \cdot (\ddot{\underline{w}} + \kappa \dot{\underline{w}}) \quad (2-5)$$

$$\underline{n} \cdot \operatorname{grad} (\dot{\Phi} + \kappa \Phi) = \underline{n} \cdot (\ddot{\underline{w}} + \kappa \dot{\underline{w}}) \quad (2-6)$$

$$\underline{n} \cdot \operatorname{grad} E = 0 \quad (2-7)$$

an Wänden.

Wie man sieht, sind Gl. (2-5) und (2-6) wegen  $E = \frac{1}{2} S_0 \underline{u}^2$  und  $\underline{u} = \text{grad } \Phi$  nichtlinear gekoppelt.

## 2.3 Die (diskretisierten) Strukturdynamik-Gleichungen

### 2.3.1 Allgemeiner Aufbau

Mit dem Ziel einer diskretisierten Darstellung der Strukturbewegung beschreibt man die Verformungen  $\underline{w}(\underline{x}, t)$  einer Struktur durch einen endlichen Satz von Modes (auch generalisierte Koordinaten oder Amplituden genannt)  $\underline{c} = \{c_i\}$  in der Form

$$\underline{w}(\underline{x}, t) = \underline{V}(\underline{c}(t), \underline{x}), \quad (2-8)$$

wobei die Koordinaten zweckmäßigerweise holonom [67, § 2.0] gewählt werden. Voraussetzungsgemäß (A5) ist  $\underline{V}$  eine lineare Funktion. Wir unterstellen weiter, daß  $\underline{c} = 0$  im Ruhezustand ist und daß die Verformungen klein sind. Dann liefert die Elastomechanik Ausdrücke für die kinetische Energie  $T$ , die potentielle Energie  $U$  und die halbe Rate des Energieverlustes infolge Reibung  $\mathcal{D}$  (Dissipation) in der Form

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2} \dot{c}_i M_{ij} \dot{c}_j \geq 0, \\ U &= \frac{1}{2} c_i S_{ij} c_j \geq 0, \\ \mathcal{D} &= \frac{1}{2} \dot{c}_i D_{ij} \dot{c}_j \geq 0, \end{aligned} \quad (2-9)$$

wobei die Einsteinsche Summationskonvention gelte. Die Matrizen  $\underline{M} = [M_{ij}]$ ,  $\underline{S} = [S_{ij}]$ ,  $\underline{D} = [D_{ij}]$  sind symmetrisch und als Masse-, Steifigkeits- und Dämpfungsmatrix bekannt. Mit der virtuellen Arbeit  $\delta W$  der äußeren Kräfte  $\underline{F}(\underline{x}, t)$  infolge kleiner Änderungen  $\delta \underline{c}$  der Koordinaten liefern die Lagrangeschen Gleichungen [69, § 2.5, § 8.4] für kleine Verformungen

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{c}_j} \right) + \frac{\partial \mathcal{D}}{\partial \dot{c}_j} + \frac{\partial U}{\partial c_j} = \frac{d(\delta W)}{d(\delta c_j)} \quad (2-10)$$

Mit

$$\delta W = \delta c_j q_j \quad (2-11)$$

und den generalisierten Kräften  $q = \{q_j\}$ ,

$$q_j(t) = \iint F(x,t) \cdot \frac{\partial w(x,t)}{\partial c_j} dS \quad (2-12)$$

erhält man hieraus die Schwingungsgleichung

$$\underline{\underline{M}} \ddot{\underline{\underline{c}}} + \underline{\underline{D}} \dot{\underline{\underline{c}}} + \underline{\underline{S}} \underline{\underline{c}} = \underline{\underline{q}} \quad (2-13)$$

Die einzelnen Strukturmodelle unterscheiden sich letztlich allein in den Formfunktionen  $\underline{v}(\underline{c}(t), \underline{x})$ , Gl. (2-8), und den Matrizen  $\underline{\underline{M}}$ ,  $\underline{\underline{D}}$  und  $\underline{\underline{S}}$  gemäß (2-9).

### 2.3.2 Das verwendete CYLDY2-Modell

In der vorliegenden FLUX-Version werden die Strukturmodell-Parameter nach dem CYLDY2-Modell [10] bestimmt. Andere Strukturmodelle, die die genannten Voraussetzungen erfüllen, sind jedoch auch ohne weiteres in FLUX einbaubar. Für Testzwecke wurden beispielsweise ein "Kesselformel-Modell", bei dem die Verformung keine Funktion des Umfanges ist, sowie ein Schalen-Modell, basierend auf den Donnell'schen Gleichungen für eine beidseitig eingespannte Zylinderschale nach Göller [68] ebenfalls verwendet. CYLDY2 erfaßt jedoch die Eigenschaften der oben eingespannten und unten starr mit dem Massering verbundenen Kernmantelschale von allen bisher bekannten Strukturmodellen bei gleichem numerischen Aufwand am genauesten [10] und wird daher in allen Fällen, über die berichtet wird, eingesetzt.

Das CYLDY2-Modell beschreibt den Kernmantel als dünne linear-elastische zylindrische Schale, die am oberen Ende fest eingespannt und am unteren Ende fest mit einem sonst frei beweglichen<sup>+)</sup> starren Masse-Ring verbunden ist. Die Formfunktionen lassen sich wegen der Symmetrie der Schale als Produkt aus azimuthalen und axialen Formfunktionen darstellen. Die azimuthalen Formfunktionen sind  $\cos(n\varphi)$ , die axialen sind  $F_m^{(n)}(z)$  und gleich den Eigenlösungen eines entsprechend gelagerten Balkens. CYLDY2 berücksichtigt, daß die azimuthale Verschiebung für  $n=0$  stets null ist und unterstellt, daß die drei Komponenten des Balkenbiegemodes ( $n=1$ ) nicht unabhängig sind. Unter Vernachlässigung solcher Feinheiten läßt sich der Ansatz für die Verformung wie folgt formulieren:

$$\underline{w}(z, \varphi, t) = \sum_{n=0}^N \sum_{m=1}^M \left\{ \begin{array}{l} F_m^{(n)}(z) \cos(n\varphi) \epsilon_{3m-2}^{(n)}(t) \\ F_m^{(n)}(z) \sin(n\varphi) \epsilon_{3m-1}^{(n)}(t) \\ F_m^{(n)}(z) \cos(n\varphi) \epsilon_{3m}^{(n)}(t) \end{array} \right\} \quad (2-14)$$

( $F' = dF/dz$ ). Bezüglich der genauen Definition der  $F_m^{(n)}$  sei auf [10, Gl. (3.4)] verwiesen. Die Elemente der Massenmatrix entsprechen den Koeffizienten  $T_{mn}^{\mu\nu}$  in [10, Gl. 4.11], die der Steifigkeitsmatrix den Koeffizienten  $U_{mn}^{\mu\nu}$  in [10, Gl. 4.9]. Dämpfung ist in dem CYLDY2-Modell nicht vorgesehen. Geeignete Werte der Dämpfungsmatrix werden später definiert.

Da die Kernmantel-Schale rotationssymmetrisch ist, haben die Matrizen  $\underline{M}, \underline{D}, \underline{S}$  die Eigenschaft, aus Blöcken  $\underline{\hat{M}}_{n,k}, \underline{\hat{D}}_{n,k}, \underline{\hat{S}}_{n,k}, n, k=0, 1, \dots, N$ , der (Regel-)Größe  $(3M \times 3M)$  zu bestehen, die nur auf der Diagonalen, also nur für  $n=k$  von Null verschieden sind. Wenn die Vektoren  $\underline{q}, \underline{\dot{q}}$  entsprechend in Teilvektoren  $\underline{\hat{q}}_n, \underline{\dot{\hat{q}}}_n$  zerlegt werden, so lautet Gl. (2-13) unter Bezug auf die Einsteinsche Summationskonvention

$$\underline{\hat{M}}_{n,k} \ddot{\underline{\hat{q}}}_k + \underline{\hat{D}}_{n,k} \dot{\underline{\hat{q}}}_k + \underline{\hat{S}}_{n,k} \underline{\hat{q}}_k = \underline{\hat{g}}_n, \quad (2-15)$$

$$n = 0, 1, \dots, N.$$

<sup>+) Eine Bewegung im Mittel in axialer Richtung ist allerdings in CYLDY2 nicht berücksichtigt</sup>

## 2.4 Die zeitliche Diskretisierung

### 2.4.1 Das Grundschema

Die Gleichungen für das Druck- und Verformungsfeld sind vom Schwingungsgleichungstyp (2-13)

$$\underline{\underline{M}} \ddot{\underline{\underline{c}}} + \underline{\underline{D}} \dot{\underline{\underline{c}}} + \underline{\underline{S}} \underline{\underline{c}} = \underline{\underline{g}}. \quad (2-13)$$

Bei bekanntem Druck- und Verformungsfeld ( $\underline{\underline{p}}$  und  $\underline{\underline{c}}$  bzw.  $\underline{\underline{w}}$ ) ist zusätzlich für das Potential eine Differentialgleichung mit erster Ableitung nach der Zeit von der Form

$$\operatorname{div} \operatorname{grad} (\psi) = - \frac{1}{s_0 \alpha^2} (\ddot{\psi} + \alpha \dot{\psi}) \quad (2-16)$$

$$\psi \equiv \dot{\Phi} + \alpha \Phi \quad (2-17)$$

zu integrieren.

#### 2.4.1.1 Diskrete Schwingungsgleichung

Für die Integration der Schwingungsgleichung wird eine verallgemeinerte Form des Newmark-Verfahrens verwendet [71-75, 43], dessen Details in Anhang 2 diskutiert sind. Das Verfahren enthält zwei freie Parameter,  $\beta$  und  $\gamma$ . Für  $\beta = \gamma = 0$  ist das Verfahren explizit und nur bedingt stabil. Für  $\beta = \gamma = 1/2$  hat es die Eigenschaften der voll-impliziten ICE-Technik [24]. Die Rechnungen werden in der Regel mit  $\beta = 1/4, \gamma = 0$  durchgeführt. Hierfür hat das Verfahren folgende Eigenschaften (siehe Anhang 2):

- a) es ist bei linearen Problemen unbedingt stabil.
- b) die Abbruchfehler sind von der Ordnung  $\Delta t^2$ .
- c) die Abbruchfehler bewirken keine numerische Dämpfung, jedoch eine Vergrößerung der effektiven Masse.

Das Verfahren arbeitet wie folgt: Die Zeitskala wird in diskrete Zeitintervalle  $\Delta t$  unterteilt, so daß

$$t^n = n \cdot \Delta t, \quad (2.18)$$

$$\underline{c}^n = \underline{c}(t^n).$$

Zur Vermeidung numerischer Rundungsfehler wird nicht mit den Anfangswerten  $\underline{c}^{n-1}, \underline{c}^n$  (für  $n=0$ ), sondern  $\underline{c}^n, \delta \underline{c}^n$  begonnen, wobei

$$\delta \underline{c}^n \equiv \underline{c}^n - \underline{c}^{n-1}. \quad (2.19)$$

Sodann wird im Sinne von Differenzenformeln gesetzt

$$\ddot{\underline{c}} := \frac{1}{\Delta t^2} (\delta \underline{c}^{n+1} - \delta \underline{c}^n), \quad (2.20)$$

$$\dot{\underline{c}} := \frac{1}{\Delta t} \left[ \left( \frac{1}{2} + \gamma \right) \delta \underline{c}^{n+1} + \left( \frac{1}{2} - \gamma \right) \delta \underline{c}^n \right], \quad (2.21)$$

$$\underline{c} := \underline{c}^n + \beta (\delta \underline{c}^{n+1} - \delta \underline{c}^n) + \gamma (\delta \underline{c}^{n+1} + \delta \underline{c}^n). \quad (2.22)$$

Analog wird mit der rechten Seite  $\underline{q}$  sowie dem Druck  $p$  verfahren. Lediglich die Energie  $E$  wird auch bei  $\beta > 0, \gamma > 0$ , allein aufgrund der Werte zur Zeit  $t^n$  berechnet, da andernfalls nichtlineare Gleichungssysteme zu lösen wären.

#### 2.4.1.2 Diskrete Potentialintegration

Für Gl. (2-17) wird geschrieben

$$\frac{1}{\Delta t} (\bar{\Phi}^{n+1} - \bar{\Phi}^n) + \alpha (\gamma_{\bar{\Phi}} \bar{\Phi}^{n+1} + (1 - \gamma_{\bar{\Phi}}) \bar{\Phi}^n) = \psi^n. \quad (2.23)$$

Dies ist eine implizite Gleichung für  $\bar{\Phi}^{n+1}$ , die sich allerdings explizit auflösen läßt, da es sich um eine skalare Gleichung und nicht um ein Gleichungssystem handelt. Sie liefert ein unbedingt stabiles Verfahren für  $\frac{1}{2} \leq \gamma_{\bar{\Phi}} \leq 1$ . Die praktischen Rechnungen wurden mit  $\gamma_{\bar{\Phi}} = 1$  durchgeführt, um eventuell mögliche Instabilitäten in-

folge der explizit behandelten spezifischen Energie zu mindern. In den praktischen Rechnungen wurde  $\gamma\phi$  bisher nicht variiert und Instabilitäten nichtlinearen Ursprungs nicht festgestellt.

#### 2.4.2 Das gekoppelte Gleichungssystem

Zum Zeitpunkt  $t^n$  sind die Größen  $\underline{c}^n$  und  $\delta \underline{c}^n$  sowie die entsprechenden Variablen für das Druckfeld  $(p^n, \delta p^n)$  und das Potentialfeld  $\phi^n$  entweder aufgrund der Anfangsbedingungen ( $n=0$ ) oder des letzten Integrationsschrittes bekannt. Zu lösen ist dann folgendes System von Gleichungen:

##### 2.4.2.1 Verformungs- und Druckfeld

a) Struktur gemäß Gl. (2-13)

$$\left\{ \frac{3}{\Delta t^2} \underline{M} + \frac{3}{\Delta t} \left( \frac{1}{2} + \gamma \right) \underline{D} + (\beta + \gamma) \underline{S} \right\} \delta \underline{c}^{n+1} + e_F (\beta + \gamma) \delta \underline{q}^{n+1} = \underline{\tau}_c^n \quad (2-24)$$

Hierbei ist  $\delta \underline{q}^{n+1}$  eine lineare Funktion von  $\delta p^{n+1}$  gemäß Gl. (2-12).

b) Randbedingungen an flexiblen Wänden gemäß Gl. (2-5)

$$- \underline{n} \cdot \left\{ \frac{3 e_s s_0}{\beta + \gamma} \left( \frac{1}{\Delta t^2} + \frac{\alpha}{\Delta t} \left( \frac{1}{2} + \gamma \right) \right) \delta \underline{w}^{n+1} \right\} - \underline{n} \cdot \text{grad } \delta p^{n+1} = \underline{\tau}_g^n \quad (2-25)$$

Hierbei ist  $\delta \underline{w}^{n+1} = \underline{V}(\delta \underline{c}^{n+1}, \underline{x})$  gemäß Gl. (2-8).

c) Druckfeld gemäß Gl. (2-3)

$$\text{div grad } (\delta p^{n+1}) - \frac{1}{(\beta + \gamma) \alpha^2 \Delta t^2} \left[ 1 + \Delta t \alpha \left( \frac{1}{2} + \gamma \right) \right] \delta p^{n+1} = \underline{\tau}_p^n \quad (2-26)$$



Die rechten Seiten  $\tau_c^n$ ,  $\tau_g^n$  und  $\tau_p^n$  sind aufgrund der Werte zum Zeitschritt  $n$  berechenbar:

$$\begin{aligned} \tau_c^n = & e_F (\underline{q}^n - (\beta - \gamma) \delta \underline{q}^n) - \underline{S} \underline{c}^n \\ & + \left\{ \frac{\mathfrak{J} M}{\Delta t^2} - \frac{\mathfrak{J}}{\Delta t} \left( \frac{1}{2} - \gamma \right) \underline{D} + (\beta - \gamma) \underline{S} \right\} \delta \underline{c}^n \end{aligned} \quad (2-27)$$

$$\begin{aligned} \tau_g^n = & \underline{n} \left\{ \frac{\mathfrak{J} e_s s_o}{\beta + \gamma} \left( \frac{1}{\Delta t^2} - \frac{\mathfrak{x}}{\Delta t} \left( \frac{1}{2} - \gamma \right) \right) \delta \underline{w}^n \right\} \\ & - \frac{1}{\beta + \gamma} \underline{n} \cdot \text{grad} \{ p^n - (\beta - \gamma) \delta p^n \} \end{aligned} \quad (2-28)$$

$$\begin{aligned} \tau_p^n = & - \frac{1}{(\beta + \gamma) \alpha^2 \Delta t^2} \left[ 1 - \Delta t \mathfrak{x} \left( \frac{1}{2} - \gamma \right) \right] \delta p^n \\ & - \frac{1}{\beta + \gamma} \text{div grad} \{ p^n - (\beta - \gamma) \delta p^n + e_N E^n \} \end{aligned} \quad (2-29)$$

Die Parameter  $\mathfrak{J}$ ,  $e_s$ ,  $e_F$ ,  $e_N$  haben entweder die Werte 0 oder 1 und entscheiden über ge- oder entkoppelte Rechnung:

$\mathfrak{J} = 0$  falls die Struktur quasistatisch (ohne Trägheit) behandelt wird

$e_s = 0$  falls die Strukturbewegung ohne Rückwirkung auf das Strömungsfeld sein soll

$e_F = 0$  falls das Strömungsfeld ohne Rückwirkung auf die Strukturbewegung sein soll

$e_N = 0$  falls die spezifische kinetische Energie vernachlässigt werden soll (lineares, akustisches Modell)

Im Normalfall haben alle diese Parameter den Wert eins. Aus den Lösungen  $\delta \underline{c}^{n+1}$ ,  $\delta p^{n+1}$  werden  $\underline{c}^{n+1}$  und  $p^{n+1}$  errechnet, siehe Gl. (2-19).

#### 2.4.2.2 Potentialfeld

Die Berechnung des Potentialfeldes  $\Phi^{n+1}$  zum neuen Zeitpunkt kann separat erfolgen, nachdem  $p^{n+1}$  und  $\underline{c}^{n+1}$  bestimmt wurden. Dies ist eine Konsequenz der explizit behandelten spezifischen kinetischen Energie.

Hierzu wird zunächst das Hilfsfeld  $\psi = \dot{\Phi} + \alpha \Phi$  ermittelt (gemäß Gl. (2-4, 2-6) in diskreter Form) aus

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \operatorname{grad} \psi &= \tau_{\psi} \equiv \\ &= \frac{1}{\varrho \alpha^2 \Delta t^2} \left[ (1 + \Delta t \alpha (\tfrac{1}{2} + \gamma)) \delta p^{n+1} - (1 - \Delta t \alpha (\tfrac{1}{2} - \gamma)) \delta p^n \right] \end{aligned} \quad (2-30)$$

mit den Randbedingungen

- an Wänden

$$\begin{aligned} \underline{n} \cdot \operatorname{grad} \psi &= \frac{e_s}{\Delta t^2} \underline{n} \cdot \left\{ (1 + \Delta t \alpha (\tfrac{1}{2} + \gamma)) \delta \underline{w}^{n+1} \right. \\ &\quad \left. - (1 - \Delta t \alpha (\tfrac{1}{2} - \gamma)) \delta \underline{w}^n \right\} \end{aligned} \quad (2-31)$$

- an Öffnungen

$$\begin{aligned} \underline{n} \cdot \operatorname{grad} \psi &= -\frac{1}{\varrho} \underline{n} \cdot \operatorname{grad} \left\{ p^n \right. \\ &\quad \left. + \beta (\delta p^{n+1} - \delta p^n) + \gamma (\delta p^{n+1} + \delta p^n) \right\} \end{aligned} \quad (2-32)$$

Es sei bemerkt, daß bei dieser Art der Diskretisierung der rechten Seite in Gl. (2-30) und der Randbedingungen die notwendige Konsistenzbedingung gemäß § A1.3 erfüllt ist.

Ist  $\psi$  bekannt, so wird das neue  $\Phi^{n+1}$  aus (2-17) berechnet:

$$\Phi^{n+1} = \frac{1}{1 + \alpha \Delta t \gamma_{\Phi}} \left[ \psi + \Phi^n (1 - \alpha \Delta t (1 - \gamma_{\Phi})) \right] \quad (2-33)$$

Schließlich kann daraus das neue Geschwindigkeitsfeld

$$\underline{u}^{n+1} = \text{grad } \Phi^{n+1} \quad (2-34)$$

und die spezifische kinetische Energie

$$E^{n+1} = \frac{1}{2} \rho_0 (\underline{u}^{n+1})^2 \quad (2-35)$$

zum neuen Zeitpunkt ermittelt werden.

Dies beschließt den  $n$ -ten Zeitschritt. Voraussetzung für die praktische Durchführung ist allerdings eine entsprechende Diskretisierung der räumlichen Ableitungen ( $\text{div}, \text{grad}$ ) und Integrale (in Gl. (2-12)), wie im nächsten Abschnitt (§ 2.5) erläutert wird.

#### 2.4.3 Symbolische Zusammenfassung

Die zeitliche Diskretisierung hat einen schwer überschaubaren Satz von Gleichungen ergeben, die im folgenden durch räumliche Diskretisierung noch weiter detailliert werden. Zur Darstellung des Verfahrens ist eine kompaktere Schreibweise erforderlich. Hierzu lassen wir im folgenden die Indices  $n, n+1$  sowie den Differenzenoperator  $\delta$  fort. Außerdem definieren wir die Abkürzungen

$$\underline{w}_n = \underline{n} \cdot \underline{w} \quad (2-36)$$

$$\underline{g} \equiv \underline{n} \cdot \text{grad } p, \quad \underline{g}_\psi \equiv \underline{n} \cdot \text{grad } \psi \quad (2-37)$$

und die Faktoren (große Buchstaben bei Matrizen, kleine bei Skalaren)

$$\underline{E}_1 \equiv \left\{ \frac{1}{\Delta t^2} \underline{M} + \frac{1}{\Delta t} \left( \frac{1}{2} + \gamma \right) \underline{D} + (\beta + \gamma) \underline{S} \right\} \quad (2-38a)$$

$$f_2 \equiv e_F (\beta + \gamma) \quad (2-38b)$$

$$f_3 \equiv \frac{1}{\Delta t^2} \frac{e_F s_0}{(\beta + \gamma)} \left[ 1 + \alpha \Delta t \left( \frac{1}{2} + \gamma \right) \right] \quad (2-38c)$$

sowie

$$\lambda^2 \equiv \frac{1}{\alpha^2 \Delta t^2 (\beta + \gamma)} \left[ 1 + \alpha \Delta t \left( \frac{1}{2} + \gamma \right) \right] \quad (2-38d)$$

Damit lauten Gl. (2-24) bis (2-26):

$$\underline{F}_1 \underline{c} + f_2 \underline{g} = \underline{\tau}_c \quad (2-39a)$$

$$f_3 \omega_n + g = -\tau_g \quad (2-39b)$$

$$\operatorname{div} \operatorname{grad} p - \lambda^2 p = \tau_p \quad (2-39c)$$

(Gl. (39a) gilt für jeden Strukturmode, (39b) an den Wänden, (39c) im Fluid-Innern). Für das Potential folgt entsprechend

$$g_\psi = \tau_{g\psi} (\omega_n, p), \quad (2-40a)$$

$$\operatorname{div} \operatorname{grad} \psi = \tau_\psi (p). \quad (2-40b)$$

Offenbar genügt es, im weiteren allein die Lösung des Systems Gl. (2-39) zu diskutieren, da das Potential davon unabhängig und nach dem gleichen Verfahren (mit  $\lambda^2=0$ ,  $f_3=0$ ) berechnet werden kann.

## 2.5 Die räumliche Diskretisierung der fluid-dynamischen Gleichungen

### 2.5.1 Aufspaltung in Druckbehälter- und Rohr-Probleme

Während der Druckbehälter streng 3D behandelt wird, genügt für das gebrochene Rohr eine 1D Näherung. Dies gilt zumindest etwa einen Rohrdurchmesser stromabwärts vom Übergang Ringraum-Rohr (Stutzen), wie 2D Potentialströmungsrechnungen gezeigt haben [8\_7]. Der insgesamt betrachtete Fluidbereich wird dementsprechend aufgeteilt, siehe Abb. 2-2. Es sei  $p(r, z, \varphi)$  das Druck- (bzw. Potential-)feld im Druckbehälter und  $p_S(r)$  das Feld im Rohr. Für die getrennte Betrachtung sind an der Grenzfläche zwischen beiden Bereichen Übergangsbedingungen zu spezifizie-

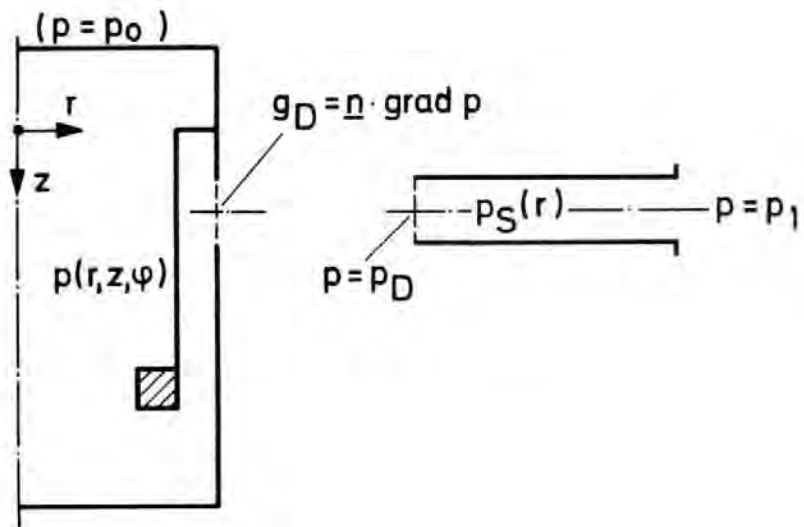


Abb. 2-2: Aufteilung in Druckbehälter- und Rohrgebiete

ren. Hierbei erweist es sich für das Kesselproblem im Hinblick auf die numerische Lösung als sinnvoll, den Normalengradienten an der Druckbehälterwand (einschließlich der Grenzfläche zwischen Kessel und Rohr)  $g_D \equiv n \cdot \text{grad } p$

(wir werden später zusätzlich  $g_w \equiv n \cdot \text{grad } p$  für den Gradienten am Kernmantel einführen) vorzugeben, da dann an der gesamten Druckbehälterwand ein einheitlicher Randbedingungstyp vorliegt. Umgekehrt wird für das Rohr ein Randwert  $p_D$  in Form einer Dirichlet-Randbedingung spezifiziert. Die Übergangsbedingung muß dann Gleichungen für  $g_D$  sowie  $p_D$  (beide als Funktion von  $p$  und  $p_s$ ) liefern. Zunächst wollen wir annehmen,  $g_D$  und  $p_D$  seien bekannt, dann reduziert sich die Lösung der Fluid-Gleichungen für das gesamte Gebiet auf die Lösung in den beiden Teilgebieten. Es ist wohl einsichtig, daß jedes Teilproblem für sich sehr viel einfacher gelöst werden kann.

Es sei erwähnt, daß dieses Konzept Werte  $g_D$  ungleich null auch an den zunächst als starr vorgegebenen Wänden des Druckbehälters zuläßt, so daß eine Erweiterung von FLUX auf einen schwingenden Druckbehälter durch die weitere Ableitung gedeckt ist (interessant z.B. für die Untersuchung der Schwingungen des Gesamtsystems bei Erdbeben-, Berst- oder Blowdown-Strahl-Belastungen).

#### 2.5.2 Aufspaltung des 3D Druckbehälter-Problems in einen Satz separierter 2D Probleme

Bei vorgegebenen Randwerten  $g_D$  ist die Geometrie des Druckbehälters (und gemäß Annahme A4 auch die der elastischen Struktur) rotationssymmetrisch. Da zudem der Typ der Randbedingungen keine Funktion des Umfangswinkels ist, läßt sich das Problem in eine Reihe von 2D Problemen separieren. Wegen der vorausgesetzten Spiegelsymmetrie des Gesamtproblems (Annahme A8) ist der Gradient an der Druckbehälterwand  $g_D$  und also auch das daraus resultierende Druck- und Verformungsfeld in eine Reihe von Kosinusfunktionen bezüglich der Umfangsvariation (Winkel  $\varphi$ ) entwickelbar. Wenn die Gleichungen linear wären, könnte dieses analytisch geschehen. Da wir aber die Nichtlinearität infolge des spezifischen

Energiefeldes zu berücksichtigen haben, wird ein diskretes Verfahren benutzt, das der Pseudo-Spektral Methode gemäß Orszag [78, 79] entspricht.

Wenn  $p_j(r, z)$  das diskrete Wertefeld an den azimutalen Positionen  $\varphi_j = \pi j / K$ ,  $j = 0, 1, 2, \dots, K$  ist und

$$\begin{aligned} \hat{p}_k &= T'_{k,j} p_j \\ (T'_{k,j} &\equiv (2/K) b_j \cos(\pi j k / K), \\ b_j &\equiv 1/2 \text{ für } j = 0, K; b_j \equiv 1 \text{ für } 1 \leq j < K) \end{aligned} \quad (2-41)$$

die "Kosinusmodes" in der Kosinusreihe

$$p_j = T_{j,k} \hat{p}_k, \quad (2-42)$$

$T_{j,k} \equiv b_k \cos(\pi j k / K)$ , (wobei wie stets die Summationsvereinbarung gilt), dann liefert die Kosinus-Transformation aus der 3D-Helmholtzgleichung (2-39c)

$$\nabla^2 p + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 p}{\partial \varphi^2} - \lambda^2 p = \tau_p(r, z, \varphi), \quad (2-43)$$

mit dem 2D-Laplace-Operator für Zylinderkoordinaten

$$\nabla^2 p \equiv \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial p}{\partial r} \right) + \frac{\partial^2 p}{\partial z^2}, \quad (2-44)$$

für die  $\hat{p}_k$  einen Satz separater 2D Helmholtzgleichungen:

$$\nabla^2 \hat{p}_k - \left( \frac{1}{r^2} \lambda_k^2 + \lambda^2 \right) \hat{p}_k = \hat{\tau}_{p,k} \quad (2-45)$$

Bezüglich Einzelheiten siehe Anhang 3, § A3.1.

Das 3D-Problem läßt sich also in folgenden Schritten lösen:

a) bestimme die modale Zerlegung der rechten Seite

$$\hat{T}_{p,k} = T'_{k,j} \tau_p(\varphi_j),$$

sowie entsprechend die Kosinus-Modes der Randwerte,  $\hat{g}_{D,k}, \hat{g}_{W,k}$

b) löse für  $k=0,1,\dots,K$  (2-45)

c) berechne das resultierende Druckfeld  $p_j(t,z)$  gemäß (2-42).

### 2.5.3 Räumliche Diskretisierung der 2D-Probleme

Um eine diskrete Lösung der 2D Helmholtz-Gleichungen (2-45) möglich zu machen, wird die  $t$ - $z$ -Ebene durch die Achse des Druckbehälters mit einem Maschennetz wie in Abb. 2-3 überzogen, das so konstruiert ist, daß Wände mit Maschenlinien zusammenfallen, vergl. § A3.2. Nach Art eines "staggered grid" [60, 61] werden den Maschenmittelpunkten  $(\tau_i, z_j)$  diskrete Werte  $p_{ijk}$  bzw. deren Kosinus-Transformierten  $\hat{p}_{ijk}$  zugeordnet. Über den Gaußschen Integralsatz erhält man eine Beziehung zwischen diesen Maschen-Mittelwerten und den mittleren Normalengradienten an den Maschenrändern. Im Fluid-Innern werden die Gradienten durch finite Differenzen zweiter Ordnung anhand der Werte  $\hat{p}_{ijk}$  in den Nachbarmaschen approximiert.

An Wänden dagegen ist der Normalengradient durch die Randbedingungen vorgegeben, wobei jeweils der Randwert in der Mitte des Randstückes eingesetzt wird. Einzelheiten sind in § A3.2 abgeleitet.

Das Resultat ist ein lineares Gleichungssystem der Form

$$\begin{aligned} \underline{\hat{L}}_{k,e} \hat{p}_e + \underline{\hat{W}}_{k,e} \hat{g}_{W,e} + \underline{\hat{N}}_{k,e} \hat{g}_{D,e} \\ = \hat{q}_k, \quad k=0,1,\dots,N, \end{aligned} \quad (2-46)$$

wobei  $\hat{p}_k, \hat{g}_{W,k}, \hat{g}_{D,k}$  die zu Vektoren zusammengefaßten diskreten Felder  $\hat{p}_{ijk}, \hat{g}_{W,jk}, \hat{g}_{D,jk}$  sind. Die Matrizen  $\underline{\hat{L}}_{k,e}, \underline{\hat{W}}_{k,e},$





Abb. 2-3: Das Maschennetz

$\hat{N}_{k,\ell}$  sind - da die 2D-Probleme separierbar sind - ungleich null nur für  $k=\ell$ .  $\hat{L}_{k,\ell}$  entspricht diskret dem Operator  $\Delta^2 - \lambda_k^2/r^4 - \lambda^2$ ,  $\hat{W}_{k,\ell}$  erfaßt den Einfluß der Gradienten am Kernmantel und  $\hat{N}_{k,\ell}$  den der Gradienten an der Druckbehälterwand. Die rechte Seite  $\hat{g}_k$  ist im wesentlichen gleich  $\tau'_{k,j} \tau_p(\varphi_j)$ , erfaßt aber auch Randwerte an eventuellen Öffnungen, wie am oberen Deckel.

#### 2.5.4 Räumliche Diskretisierung des 1D-Rohrproblems

Das 1D behandelte Rohrproblem wird ähnlich wie die 2D-Probleme mittels finiter Differenzen approximiert. Wenn  $\underline{L}_s$  der Vektor der diskreten Werte im Rohr ist, dann erhält man ein Gleichungssystem

$$\underline{L}_s \underline{L}_s + \underline{D}' \underline{P}_D = \underline{g}_s, \quad (2-47)$$

wobei  $\underline{L}_s$  eine tridiagonale Matrix ist, die dem Operator  $\partial^2/\partial r^2 - \lambda^2$  entspricht;  $\underline{D}'$  erfaßt den Einfluß des Randwerts am Stutzen (nur die erste Komponente von  $\underline{D}'$  ist ungleich null);  $\underline{g}_s$  ist im wesentlichen gleich der gegebenen rechten Seite  $\tau_j$  an den diskreten Orten, erfaßt aber auch die Randwerte (vorgegebener Druck bzw. vorgegebene Potentialableitung) an der Bruchöffnung, siehe § A3.3.

#### 2.5.5 Übergangsbedingungen am Stutzen

Am Stutzen stehen eine oder mehrere Maschenzellen  $(i,j,k)$  mit  $i = MV$  (siehe Abb. 2-3) in Kontakt mit der Rohreintrittsfläche. Diese Tatsache wird durch Koeffizienten  $\alpha_{jk}$  ausgedrückt, wobei  $\alpha_{jk}$  der Anteil der Randfläche  $R_V \Delta\varphi \Delta z_j$  der Randmasche ist, der mit dem Rohrquerschnitt zusammenfällt. Siehe Abb. 2-4. Hierbei ist es unerheblich, daß das Rohr einen Kreis-Querschnitt hat. Vielmehr kann das "Rohr" auch Schlitzform haben, so daß in dieser Hinsicht das Programm auch für die Untersuchung der Ausströmung aus einem geborstenen Druckbehälter anwendbar ist. Weiter kann die Druckbehälterwand beweglich und also der vorzugebende Gradient an dieser Wand,

$$g_V \equiv n \cdot \text{grad } p,$$

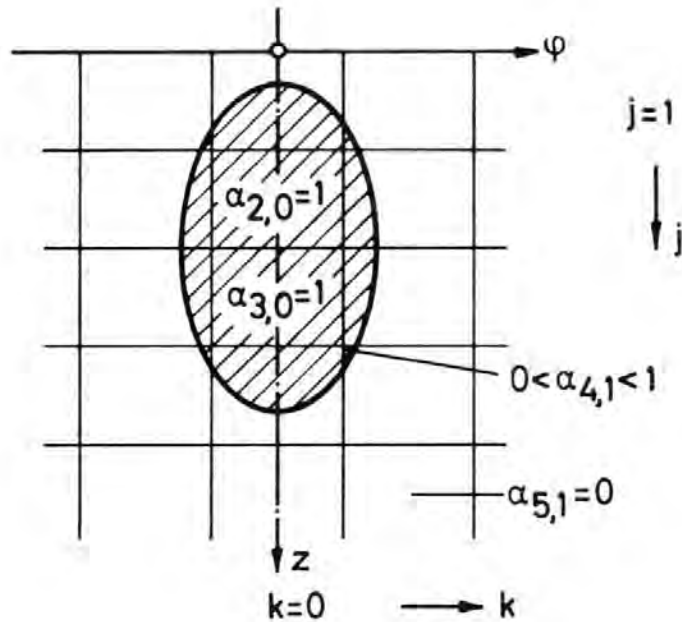


Abb. 2-4 Möglicher Rohrquerschnitt mit verschiedenen relativen Kontaktflächen

ungleich Null sein. Mit diesen Definitionen wird für  $g_{D,jk}$ , dem mittleren Gradienten in der Masche  $(i,j,k)$  an der Druckbehälterwand, der Ansatz

$$g_{D,jk} = \alpha_{jk} (p_{S,i+1} - p_{ijk}) / \Delta r_{i+1/2} + (1 - \alpha_{jk}) g_{V,jk} \quad (2-48)$$

benutzt. Der erste Anteil erfaßt den Druckgradienten an der Öffnung mittels finiter Differenzen (siehe auch Abb. 2-3), der zweite infolge Wandbewegungen. Die vorliegenden Rechnungen gelten

für  $g_V = 0$ . Symbolisch schreiben wir diese Gleichung mit der Einheitsmatrix  $\underline{I}$  als

$$\underline{I} \underline{g}_D = - \underline{G}_S \underline{p}_S - \underline{G}_D \underline{p} + \underline{g}_D. \quad (2-49)$$

Umgekehrt muß - aus Konsistenzgründen - der mittlere Gradient bezüglich  $p_S$  im Rohr am Stutzen sich aus

$$(\sum \alpha_{jk} g_{D,jk}) / (\sum \alpha_{jk})$$

ergeben. Dies liefert

$$p_D = (\sum \alpha_{jk} p_{ijk}) / (\sum \alpha_{jk}) \quad (2-50)$$

als Randwert für das Rohr.

Es sei bemerkt, daß bei dieser Betrachtung Druckverluste infolge der Kontraktion (Stoßverluste) nicht berücksichtigt sind. Falls notwendig, sind entsprechende Erweiterungen möglich [80]. Sie führen allerdings auf nichtlineare Gleichungen, die mit den direkten Verfahren nur nach Linearisierung oder nur bei expliziter Zeitdiskretisierung gelöst werden können.

Der Randwert  $p_D$  in (2-47) kann mittels (2-50) eliminiert werden, wobei das Ergebnis symbolisch als

$$\underline{L}_S \underline{p}_S + \underline{D} \underline{p} = \underline{g}_S \quad (2-51)$$

geschrieben wird.

#### 2.5.6 Symbolische Zusammenfassung

Bei der räumlichen Diskretisierung entsteht für jede diskret betrachtete Masche eine lineare Gleichung. Wegen der relativ komplizierten Geometrie ist es aus Platzgründen unangebracht, jede Gleichung im Detail anzugeben. Wir beschränken uns hier darauf, die Gleichungen symbolisch mittels Matrizen darzustellen. Die Ableitung dieser Gleichungen ist im Anhang 3, soweit

notwendig, im einzelnen erläutert. Unter Zusammenfassung von (2-41, 42, 46, 49, 51) haben wir so das Gleichungssystem

$$\begin{bmatrix} 0 & \underline{\underline{I}} & \underline{\underline{G}}_D & \underline{\underline{G}}_S \\ \underline{\underline{W}} & \underline{\underline{N}} & \underline{\underline{L}} & 0 \\ 0 & 0 & \underline{\underline{D}} & \underline{\underline{L}}_S \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \underline{\underline{q}}_W \\ \underline{\underline{q}}_D \\ \underline{\underline{p}} \\ \underline{\underline{p}}_S \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \underline{\underline{q}}_D \\ \underline{\underline{q}} \\ \underline{\underline{q}}_S \end{Bmatrix} \quad (2-52)$$

erhalten. Die Matrizen  $\underline{\underline{W}}, \underline{\underline{N}}, \underline{\underline{L}}$  bestehen aus Blöcken mit den Indizes  $j, \ell$ , wobei - z.B. -

$$\underline{\underline{L}}_{j,\ell} = T_{j,k} \hat{\underline{\underline{L}}}_{k,m} T'_{m,\ell} \quad (2-53)$$

Die Werte 0 sind als Null-Matrizen zu verstehen.

G1. (2-52) enthält zunächst mehr Unbekannte als Gleichungszeilen. Die Anzahl der Gleichungen entspricht der Anzahl der Kontaktmaschen am Stutzen plus der Anzahl der Maschen im Druckbehälter plus der Anzahl der Maschen im Rohr. Es fehlen so viele Gleichungen wie der Vektor  $\underline{\underline{q}}_W$  - die Gradienten-Werte in den den Kernmantel berührenden Maschenrand-Mitten - Komponenten hat. Diese sind entweder vorzugeben oder mittels zusätzlicher Gleichungen von der Strukturmechanik her zu bestimmen.

## 2.6 Die räumlich diskretisierten Fluid-Struktur-Koppelungsgleichungen

Die Fluid-Dynamik ist mit der Struktur-Dynamik über die Druck-Randbedingung (2-39b) einerseits und die modalen Strukturlasten  $\underline{\underline{q}}$  gemäß (2-12) andererseits gekoppelt. Diese Beziehungen sind bisher als Differentiale oder Integrale definiert und nun hier diskret auszudrücken.

Der Kernmantel hat mit  $N_F$  Fluidmaschen eine gemeinsame Kontaktfläche. Wir bezeichnen diese Maschen mit den Indizes  $(j, \ell)$  wobei  $\ell = 0, 1, \dots, K$  dem Umfangswinkel  $\varphi_\ell$  entspricht und der In-

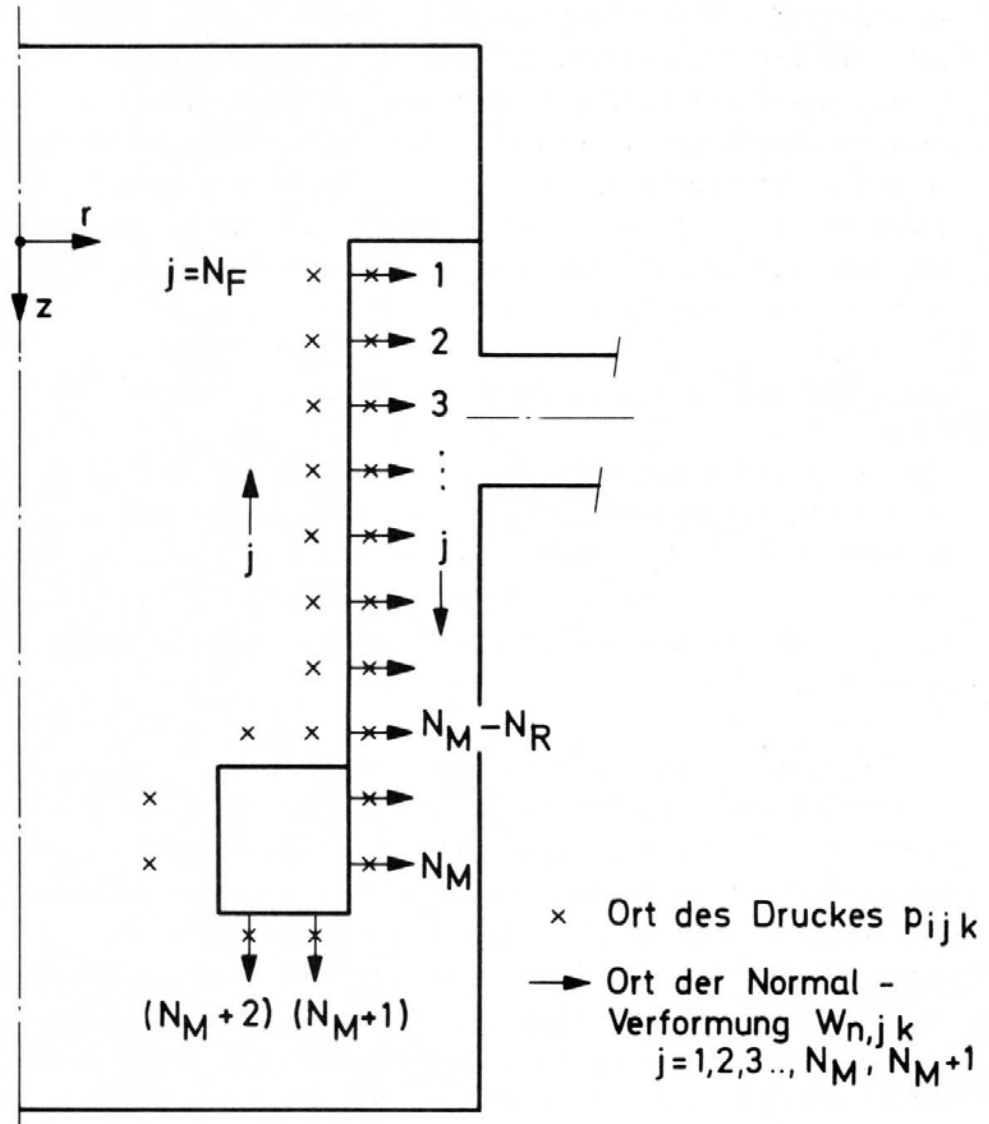


Abb. 2-5: Die Nummerierung der Kontaktflächen zwischen Kernmantel und Fluid.

der  $j = 1, 2, \dots, N_F$  gemäß Abb. 2-5 die Maschen am Kernmantelrand entlang fortlaufend numeriert. Im Programm wird die Tatsache ausgenutzt, daß der Kernmantel als dünne Schale und der Massering als starr unterstellt wird. In diesem Fall sind die Normalverformungen auf beiden Seiten des Kernmantels bis auf das Vorzeichen gleich groß. Weiterhin kann die axiale Bewegung des Masserings vernachlässigt werden, so daß im Minimalfall im Programm der Index  $j$  von 1 bis  $N_M$  variiert. In der folgenden Ableitung wird darauf jedoch keine Rücksicht genommen. Hier variiert  $j$  von 1 bis  $N_F$ .

#### 2.6.1 Das diskrete Verformungsfeld der Struktur

Das diskrete Druckfeld  $p$  wird von den Normalen-Gradienten  $g_w$  an den Mittelpunkten der Maschen  $(j, \ell)$  beeinflusst, die den Kernmantel berühren. Gemäß (2-39b) steht  $g_w$  mit der normalen Kernmantelverformung  $w_n$  an den gleichen Orten in Beziehung. Es sei  $w_n$  der Vektor der normalen Strukturverformung an eben diesen Orten.

Vielleicht sollte man - entsprechend der Tatsache, daß  $g_w$  eigentlich die Mittelwerte des Gradienten über den jeweiligen Maschenrand bedeuten, siehe (A3-34) -  $w_n$  als den Mittelwert der normalen Strukturverformung an den Maschenrändern definieren. Dies erscheint prinzipiell genauer und auch praktisch realisierbar, jedoch ist es einfacher und im Sinne der Differenzenapproximationen gleichwertig,  $w_n$  als den Wert im Mittelpunkt des jeweiligen Randstückes zu verstehen, da dann die Notwendigkeit, Integrale über die Formfunktionen bilden zu müssen, entfällt. Damit kann das Strukturmodell leichter gegen ein anderes ausgetauscht werden.

Wenn  $(z_j, \varphi_\ell)$  die Koordinaten des Mittelpunktes eines Maschenrandes am Kernmantel sind, dann ist gemäß (2-8)

$$w_{n,j\ell} = \underline{n} \cdot \underline{v}(\underline{\varepsilon}, (z_j, \varphi_\ell)). \quad (2-54)$$

(Bei Verwendung von Mittelwerten wäre

$$\underline{w}_{n,j\ell} = \oint_{(j,\ell)} \underline{n} \cdot \underline{v}(\underline{s}, \underline{x}) d\underline{s} / \oint_{(j,\ell)} d\underline{s} , \quad (2-54')$$

wobei  $\oint_{(j,\ell)}$  das Integral über die Kontaktfläche der Masche  $j,\ell$  bedeutet.)

Da  $\underline{v}$  voraussetzungsgemäß eine lineare Funktion der Strukturmodes ist (Annahme A5) und da  $\underline{v}$  gemäß (2-14) aus Produkten axialer und azimuthaler Formfunktionen konstruiert ist, von denen die letzteren Kosinusfunktionen sind, ist im Falle  $N \leq K$  (mindestens so viele Fluidmaschen  $K$  wie Modes  $N$  am Umfang) stets folgende Beziehung angebar:

$$\underline{w}_n = \underline{V} \cdot \underline{c} \quad (2-55')$$

oder

$$\underline{w}_{n,j\ell} = \sum_{k=0}^K \sum_{m=0}^M T_{\ell,k} \hat{V}_{j,m}^{(k)} c_m^{(k)} . \quad (2-55)$$

Die Matrix  $\underline{\hat{V}}^{(k)} = [\hat{V}_{j,m}^{(k)}]$  wird als "Vorwärtstransformations-Matrix" bezeichnet und ist von den axialen Formfunktionen und der Richtung des Normalenvektors  $\underline{n}$  bestimmt. Da hier die Koeffizienten  $T_{\ell,k}$  der Kosinus-Transformation explizit auftreten, ist die Berechnung der modalen Komponenten

$$\hat{w}_{n,jk} \equiv T'_{k,\ell} w_{n,j\ell}$$

besonders einfach:

$$\hat{w}_{n,jk} = \hat{V}_{j,m}^{(k)} c_m^{(k)} \quad (2-56)$$

Die Elemente der Matrix  $\underline{\hat{V}}^{(k)}$  sind in § A3.4 angegeben.



## 2.6.2 Die Strukturlasten infolge des diskreten Druckfeldes

Der Kernmantel hat mit einer Reihe von Fluid-Maschen  $(j, \ell)$  eine gemeinsame Kontaktfläche. Die Größe dieser Flächen ist

$$\sigma_{j, \ell} = 2 b_e \frac{\pi}{K} s^{(j)} \quad (2-57)$$

(Faktor 2 wegen der beiden Seiten  $0 \leq \varphi < \pi$  und  $\pi \leq \varphi < 2\pi$  ; Faktor  $b_e$  weil die Maschen  $\ell=0, K$  nur zur Hälfte zu jedem Bereich gehören).

Dabei ist

$$s^{(j)} = \int_{(j)} r \, ds(r, z) \quad (2-58)$$

das Integral entlang dem Weg  $ds$  in der  $r$ - $z$ -Ebene. In der Regel ist also am Kernmantel

$$s^{(j)} = R_M \Delta z_j, \quad (2-59)$$

mit Ausnahme des Masserings, wo  $ds(r, z)$  gleich  $dr$  sein kann. In jeder dieser Kontaktflächen wirkt auf die Struktur die Flächenlast  $F_{j, \ell} = -p_{w, j, \ell} \underline{n}$ , da  $\underline{n}$  die in das Fluidgebiet weisende Normale ist. Tangentialkräfte sind gemäß A6 ausgeschlossen. Der Druck  $p_{w, j, \ell}$  sei der Mittelwert des Druckes in dieser Fläche, ebenso sei  $w_{n, j, \ell}$  die Schalenverformung in der Mitte der Masche bzw. im Mittel über die Masche. Damit folgt aus (2-12)

$$\begin{aligned} q_m^{(k)} &= \iint F \cdot \frac{\partial w}{\partial c_m^{(k)}} d\sigma \\ &= \frac{\partial}{\partial c_m^{(k)}} \sum_{j=1}^{N_F} \sum_{\ell=0}^K \iint_{(j, \ell)} -p \underline{n} \cdot \underline{w} d\sigma, \end{aligned} \quad (2-60)$$

$$q_m^{(k)} \approx \frac{\partial}{\partial c_m^{(k)}} \sum_{j=1}^{N_F} \sum_{l=0}^K - p_{w,jl} w_{n,jl} \sigma_{jl} \quad (2-61)$$

Ersetzen wir analog zu (2-42)

$$p_{jl} = T_{li} \hat{p}_{ji}$$

und  $w_{n,jl}$  gemäß (2-55), so folgt

$$q_m^{(k)} = - \hat{R}_{m,j}^{(k)} \hat{p}_{w,jk} \quad (2-62)$$

wobei

$$\hat{R}_{m,j}^{(k)} = \pi b_k^{(j)} \hat{V}_{j,m}^{(k)} \quad (2-63)$$

Der Randdruck  $\hat{p}_{w,jk}$  ist aus den eigentlich betrachteten Werten  $\hat{p}_{i,jk}$  und den Normalengradienten  $\hat{g}_{w,jk}$  zu berechnen. Wenn beispielsweise eine Masche an der Kernmantelaußenseite mit  $i = MM+1$  betrachtet wird, so kann  $\hat{p}_{w,jk}$  näherungsweise aus

$$\hat{p}_{w,jk} = \hat{p}_{i,jk} - \frac{1}{2} \Delta r_{i-1/2} \hat{g}_{w,jk} \quad (2-64)$$

berechnet werden. Demnach lautet der allgemeine Zusammenhang zwischen  $\underline{q}$  und dem Druckfeld

$$\underline{q} = - \left( \underline{\hat{R}}^{(k)} \underline{\hat{p}}_k - \underline{\hat{R}}'^{(k)} \underline{\hat{g}}_{w,k} \right) \quad (2-65)$$

Verkürzt schreiben wir auch  $\underline{R} \equiv \text{diag}(\underline{\hat{R}}^{(k)}), \underline{R}' \equiv \text{diag}(\underline{\hat{R}}'^{(k)})$ ,

$$\underline{q} = - \left( \underline{R} \underline{p} - \underline{R}' \underline{g}_w \right), \quad (2-65')$$

wobei  $\underline{R}$  die "Rückwärtstransformations-Matrix" genannt wird.

## 2.7 Zusammenfassung des resultierenden Gleichungssystems

Faßt man Gl. (2-53, 55', 65', 39b, 39c) zusammen, so hat die Diskretisierung folgendes Gleichungssystem ergeben, das zu jedem Zeitschritt für das Druckfeld zu lösen ist:

$$\begin{bmatrix} \underline{\underline{I}} & 0 & 0 & \underline{\underline{G_D}} & \underline{\underline{G_S}} \\ 0 & \underline{\underline{F_1}} & -\underline{\underline{f_2 R}} & \underline{\underline{f_2 R}} & 0 \\ 0 & \underline{\underline{f_3 V}} & \underline{\underline{I}} & 0 & 0 \\ \underline{\underline{N}} & 0 & \underline{\underline{W}} & \underline{\underline{L}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \underline{\underline{D}} & \underline{\underline{L_S}} \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \underline{\underline{q_D}} \\ \underline{\underline{c}} \\ \underline{\underline{q_W}} \\ \underline{\underline{p}} \\ \underline{\underline{p_S}} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \underline{\underline{q_D}} \\ \underline{\underline{r_c}} \\ -\underline{\underline{r_g}} \\ \underline{\underline{q}} \\ \underline{\underline{q_S}} \end{Bmatrix} \quad (2-66)$$

Das eingerahmte innere Teil-Gleichungssystem zerfällt bei Kosinus-Transformation von  $\underline{\underline{q_D}}, \underline{\underline{q_W}}$  und  $\underline{\underline{p}}$  sowie der rechten Seiten in einen Satz unabhängiger 2D-Probleme.

Für das Potentialfeld bzw. das Hilfsfeld  $\psi$  (siehe Gl.2-17) ist zu jedem Zeitschritt anschließend ein Gleichungssystem zu lösen, dessen Struktur sich durch Streichen der zweiten und dritten Zeilen und Spalten der Matrix in (2-66) ergibt.

Aus dem Potentialfeld kann schließlich das Geschwindigkeitsfeld  $\underline{\underline{u}}$  gemäß (2-1) und das Energiefeld  $\underline{\underline{E}}$  (A1-12) berechnet werden. Die hierbei verwendeten diskretisierten Formeln basieren auf finiten Differenzen in  $r$ - $z$ -Ebenen, wobei die Maschen-Zuordnung gemäß Abb. 2-6 erfolgt, und in der azimuthalen Richtung auf pseudo-spektraler Approximation [78]. Die Einzelheiten sind in § A3.5 angegeben.

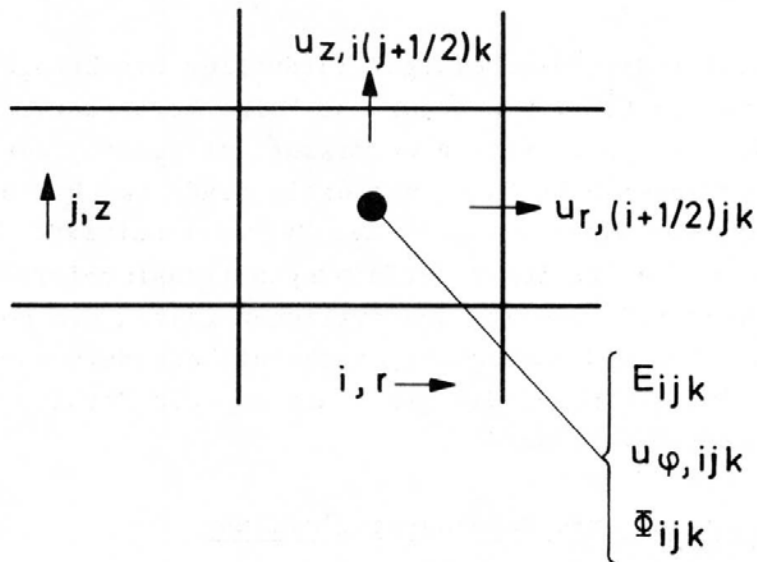


Abb. 2-6 Geschwindigkeit  $\underline{u} = (u_r, u_z, u_\varphi)$ , Potential  $\Phi$  und spezifische kinetische Energie  $E$  in einer Masche ("staggered grid")

### 3. SACHGEMÄSSHEIT UND STABILITÄT DER GEKOPPELTEN RECHNUNG

#### 3.0 Übersicht

Dieses Kapitel ist die Folge einiger leidvoller Erfahrungen bei der Entwicklung von FLUX. Dem Autor ist keine Veröffentlichung bekannt, in der die Voraussetzungen diskutiert werden, die für eine stabile gekoppelte Rechnung notwendig sind. Das Ergebnis ist eine Bedingung, vor allem zwischen der "Vorwärtsmatrix", die die Strukturmoden in die örtlichen Verformungen transformiert und der "Rückwärtsmatrix", die aus den örtlichen Lasten die modalen Lasten liefert. Diese Untersuchung erscheint besonders notwendig im Lichte der Tatsache, daß das Fluid und die Struktur unterschiedlich diskretisiert wurden.

#### 3.1 Sachgemäß formulierte Schwingungsgleichung

Ein schwingungsfähiges System, dessen Freiheitsgrade  $\underline{y}$  der linearen Schwingungsgleichung

$$\underline{\underline{M}}' \ddot{\underline{y}} + \underline{\underline{D}}' \dot{\underline{y}} + \underline{\underline{S}}' \underline{y} = \underline{z} \quad (3-1)$$

genügen, ist sachgemäß formuliert [81] und demnach numerisch integrierbar, wenn die Massen-, Dämpfungs- und Steifigkeitsmatrizen positiv definit bzw. semi-definit sind [69, S. 44 und 157], d.h. (oberer Index  $T$  bezeichnet transponierte Vektoren oder Matrizen)

$$\underline{x}^T \underline{\underline{M}}' \underline{x} > 0, \quad (3-2a)$$

$$\underline{x}^T \underline{\underline{D}}' \underline{x} \geq 0, \quad (3-2b)$$

$$\underline{x}^T \underline{\underline{S}}' \underline{x} > 0, \quad (3-2c)$$

für jeden beliebigen reellen Vektor passender Länge  $\underline{x}$  ungleich dem Nullvektor [782, S. 287].

Wenn diese Voraussetzungen erfüllt sind, dann läßt sich (3-1) durch eine Hauptachsentransformation (siehe [69, § 2.4] bzw. Anhang 4) auf einen Satz entkoppelter Schwingungsgleichungen

$$M \ddot{\underline{x}} + D \dot{\underline{x}} + S \underline{x} = \underline{r} \quad (3-3)$$

transformieren, wobei die skalaren Werte  $M, D, S$  die Bedingungen

$$M \neq 0, \quad D/M \geq 0, \quad S/M > 0 \quad (3-4)$$

erfüllen.

Die Hauptachsentransformation ist in gleicher Weise auch für die zeitlich diskretisierten Gleichungen möglich, da sie vom Lösungsvektor  $\underline{y}$  und also von seiner Diskretisierung unabhängig ist. Nun wurde in Anhang 2 für Schwingungsgleichungen der Art (3-3) mit den Eigenschaften (3-4) gezeigt, daß das verwendete Integrationsverfahren unbedingt stabil ist. Die Verallgemeinerung dieser Aussage für das gekoppelte Problem ist also dann möglich, wenn es in der Form von (3-1) mit Eigenschaften (3-2) geschrieben werden kann.

### 3.2 Sachgemäßheit gekoppelter Fluid-Struktur Systeme

Es wird zunächst unterstellt, daß das Fluid-Struktur-Problem linear, bereits räumlich (aber nicht zeitlich) diskretisiert und wie folgt formulierbar sei:

$$\underline{\underline{M}} \ddot{\underline{\underline{c}}} + \underline{\underline{D}} \dot{\underline{\underline{c}}} + \underline{\underline{S}} \underline{\underline{c}} = - \underline{\underline{R}} \underline{\underline{p}} + \underline{\underline{q}} \quad (3-5a)$$

$$\underline{\underline{K}} \underline{\underline{p}} + \underline{\underline{D}}_F \dot{\underline{\underline{p}}} + \underline{\underline{L}} \underline{\underline{p}} = \underline{\underline{v}} \ddot{\underline{\underline{c}}} + \underline{\underline{f}} \quad (3-5b)$$

Offensichtlich ist es notwendig, daß die entkoppelten Probleme ( $\underline{\mathcal{R}}=0, \underline{\mathcal{V}}=0$ ) für sich sachgemäß formuliert sind, d.h. es muß vorausgesetzt werden, daß

$$\underline{x}_1^T \underline{\mathcal{M}} \underline{x}_1 > 0 \quad \underline{x}_2^T \underline{\mathcal{K}} \underline{x}_2 > 0 \quad (3-6a)$$

$$\underline{x}_1^T \underline{\mathcal{D}} \underline{x}_1 \geq 0 \quad \underline{x}_2^T \underline{\mathcal{D}}_F \underline{x}_2 \geq 0 \quad (3-6b)$$

$$\underline{x}_1^T \underline{\mathcal{S}} \underline{x}_1 > 0 \quad \underline{x}_2^T \underline{\mathcal{L}} \underline{x}_2 > 0 \quad (3-6c)$$

für jeden beliebigen reellen Vektor  $\underline{x}_1$  bzw.  $\underline{x}_2$  (ungleich null) passender Länge.

G1. (3-5) kann in Matrizenform geschrieben werden:

$$\begin{bmatrix} \underline{\mathcal{M}} & \\ -\underline{\mathcal{V}} & \underline{\mathcal{K}} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{\underline{c}} \\ \ddot{\underline{p}} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} \underline{\mathcal{D}} & \\ & \underline{\mathcal{D}}_F \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{\underline{c}} \\ \dot{\underline{p}} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} \underline{\mathcal{S}} & \underline{\mathcal{R}} \\ & \underline{\mathcal{L}} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \underline{c} \\ \underline{p} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \underline{g} \\ \underline{f} \end{Bmatrix}. \quad (3-7)$$

In dieser Form ist die sachgemäße Formulierung nicht einzusehen. Im Gegenteil läßt die Unsymmetrie der effektiven Masse- und Steifigkeitsmatrizen die Verletzung der positiven Definitheit befürchten.

Wenn jedoch die Struktur-Gleichungen (3-5a) nach der Zeit differenziert und dann

$$\underline{u} = \dot{\underline{c}}$$

substituiert wird, dann folgt (mit  $\dot{\underline{\mathcal{M}}} = \dot{\underline{\mathcal{D}}} = \dot{\underline{\mathcal{S}}} = 0$ )

$$\underline{\mathcal{M}} \ddot{\underline{u}} + \underline{\mathcal{D}} \dot{\underline{u}} + \underline{\mathcal{S}} \underline{u} = -\underline{\mathcal{R}} \dot{\underline{p}} + \dot{\underline{g}}, \quad (3-8)$$

$$\underline{\mathcal{K}} \ddot{\underline{p}} + \underline{\mathcal{D}}_F \dot{\underline{p}} + \underline{\mathcal{L}} \underline{p} = \underline{\mathcal{V}} \dot{\underline{u}} + \underline{f}$$

oder (3-1) mit

$$\underline{\underline{M}}' = \begin{bmatrix} \underline{\underline{M}} \\ \underline{\underline{K}} \end{bmatrix}, \quad \underline{\underline{D}}' = \begin{bmatrix} \underline{\underline{D}} & \underline{\underline{R}} \\ \underline{\underline{v}} & \underline{\underline{D}}_F \end{bmatrix}, \quad \underline{\underline{S}}' = \begin{bmatrix} \underline{\underline{S}} \\ \underline{\underline{L}} \end{bmatrix},$$

$$\underline{\underline{y}} = \begin{Bmatrix} \underline{\underline{u}} \\ \underline{\underline{p}} \end{Bmatrix}, \quad \underline{\underline{z}} = \begin{Bmatrix} \dot{\underline{\underline{q}}} \\ \underline{\underline{f}} \end{Bmatrix}. \quad (3-9)$$

Die positive Definitheit von  $\underline{\underline{M}}'$  und  $\underline{\underline{S}}'$  ist wegen (3-6) gesichert. Die Definitheit von  $\underline{\underline{D}}'$  folgt aus dem quadratischen Ausdruck

$$\mathcal{D} = (\dot{\underline{\underline{x}}}_1^T, \dot{\underline{\underline{x}}}_2^T) \underline{\underline{D}}' \begin{Bmatrix} \dot{\underline{\underline{x}}}_1 \\ \dot{\underline{\underline{x}}}_2 \end{Bmatrix}, \quad (3-10)$$

der der Energiedissipation entspricht, siehe (2-9). Ausmultiplizieren liefert

$$\begin{aligned} \mathcal{D} = & (\dot{\underline{\underline{x}}}_1^T \underline{\underline{D}} \dot{\underline{\underline{x}}}_1 + \dot{\underline{\underline{x}}}_2^T \underline{\underline{D}}_F \dot{\underline{\underline{x}}}_2) \\ & + (\dot{\underline{\underline{x}}}_1^T \underline{\underline{R}} \dot{\underline{\underline{x}}}_2 - \dot{\underline{\underline{x}}}_2^T \underline{\underline{v}} \dot{\underline{\underline{x}}}_1). \end{aligned} \quad (3-11)$$

Nun ist der erste Klammersummand wegen (3-6b) nicht negativ. Damit von der Koppelung her kein Beitrag zur Energiedissipation kommt, muß gelten

$$\begin{aligned} \dot{\underline{\underline{x}}}_1^T \underline{\underline{R}} \dot{\underline{\underline{x}}}_2 &= \dot{\underline{\underline{x}}}_2^T \underline{\underline{v}} \dot{\underline{\underline{x}}}_1 \\ &= \dot{\underline{\underline{x}}}_1^T \underline{\underline{v}}^T \dot{\underline{\underline{x}}}_2 \end{aligned} \quad (3-12)$$

und für beliebiges  $\dot{\underline{\underline{x}}}_1, \dot{\underline{\underline{x}}}_2$  also

$$\boxed{\underline{\underline{R}} = \underline{\underline{v}}^T} \quad (3-13)$$



Wir sehen, daß diese Beziehung die wesentliche Forderung ist, die man an die Formulierung der Koppelungsgleichungen zu stellen hat. Wenn (3-13) sowie (3-6) sichergestellt sind, darf die Art der örtlichen Diskretisierung im Fluid- und Strukturteil ansonsten beliebig unterschiedlich sein.

Weiter sind folgende Schlußfolgerungen möglich:

- a) Die Koppelung über die Matrizen  $\underline{\underline{R}}$  und  $\underline{\underline{v}}$  wirkt auf die Teilsysteme insofern, als Energie von einem Teil dem anderen entzogen wird.
- b) Ist die Bedingung (3-13) verletzt, so kann die Folge sowohl eine zusätzliche Dämpfung als auch möglicherweise zu Instabilitäten führende Energiezufuhr sein - je nach dem Vorzeichen von  $\underline{\underline{D}}$  in (3-11).

### 3.3 Sonderfälle: inkompressibles Fluid oder masselose Struktur

#### 3.3.1 Virtuelle Fluid-Massen-Matrix

Bei inkompressiblem und reibungsfreiem Fluid sind in (3-5)  $\underline{\underline{K}} = \underline{\underline{D}}_F = 0$ . In diesem Fall kann der Druck  $p$  aus (3-5b) mittels  $\ddot{\underline{\underline{c}}}$  ausgedrückt und in (3-5a) eingesetzt werden:

$$\begin{aligned} p &= \underline{\underline{L}}^{-1} \underline{\underline{v}} \ddot{\underline{\underline{c}}} + \underline{\underline{L}}^{-1} f \\ [\underline{\underline{M}} + \underline{\underline{R}} \underline{\underline{L}}^{-1} \underline{\underline{v}}] \ddot{\underline{\underline{c}}} + \underline{\underline{D}} \dot{\underline{\underline{c}}} + \underline{\underline{S}} \underline{\underline{c}} &= \underline{\underline{q}} - \underline{\underline{R}} \underline{\underline{L}}^{-1} f \end{aligned} \quad (3-14)$$

Den Ausdruck

$$\underline{\underline{F}} \equiv \underline{\underline{R}} \underline{\underline{L}}^{-1} \underline{\underline{v}} \quad (3-15)$$

bezeichnet man als virtuelle Fluid-Massen-Matrix. Diese Matrix ist - wie erforderlich - positiv definit, wenn  $\underline{\underline{L}}$  positiv definit und symmetrisch ( $\underline{\underline{L}} = \underline{\underline{L}}^T$ ) ist und  $\underline{\underline{R}} = \underline{\underline{v}}^T$ , denn für den quadratischen Ausdruck

$$\underline{Q} = \underline{x}^T \underline{R} \underline{\mathcal{L}}^{-1} \underline{v} \underline{x} \quad (3-16)$$

folgt mit der Substitution

$$\underline{v} \underline{x} = \underline{\mathcal{L}} \underline{z} \quad (3-17)$$

unter den genannten Voraussetzungen

$$\begin{aligned} \underline{Q} &= \underline{z}^T \underline{\mathcal{L}}^T \underline{\mathcal{L}}^{-1} \underline{\mathcal{L}} \underline{z} \\ &= \underline{z}^T \underline{\mathcal{L}}^T \underline{z} = \underline{z}^T \underline{\mathcal{L}} \underline{z} > 0. \end{aligned} \quad (3-18)$$

Dies gilt für sonst beliebige Matrizen  $\underline{v}$ .

### 3.3.2 Virtuelle Kompressibilität

Wenn umgekehrt die Struktur-Masse und -Dämpfung vernachlässigbar klein sind, dann liefert (3-5a)

$$\underline{c} = - \underline{\mathcal{S}}^{-1} \underline{R} \underline{p} + \underline{\mathcal{S}} \underline{q} \quad (3-19)$$

und

$$[\underline{\mathcal{K}} + \underline{v} \underline{\mathcal{S}}^{-1} \underline{R}] \ddot{\underline{p}} + \underline{D}_F \dot{\underline{p}} + \underline{\mathcal{L}} \underline{p} = \underline{f} + \underline{v} \underline{\mathcal{S}}^{-1} \underline{q}.$$

D.h., die Struktur-Steifigkeit führt zu einer zusätzlichen virtuellen Kompressibilitäts-Matrix

$$\underline{\mathcal{K}}_S \equiv \underline{v} \underline{\mathcal{S}}^{-1} \underline{R}, \quad (3-20)$$

die für symmetrisches  $\underline{\mathcal{S}}$  unter den Voraussetzungen (3-6c) und (3-13) positiv definit ist.

### 3.4 Sachgemäßheit der vorliegenden gekoppelten Schwingungsgleichung bei der gewählten Diskretisierung

In diesem Abschnitt sollen die 8 in (3-5) aufgeführten Matrizen für das vorliegende räumlich diskretisierte Problem angegeben

und auf Einhaltung der geforderten Voraussetzungen geprüft werden.

Hierzu wiederholen wir die in §2 abgeleiteten, räumlich diskretisierten Gleichungen ohne zeitliche Diskretisierung. Da die Fluid-Struktur-Koppelung allein bei den 2D Problemen wirksam ist, werden wir uns auf diese beschränken. Das Ergebnis des §2 lautet dann

$$\underline{\underline{M}} \ddot{\underline{\underline{\xi}}} + \underline{\underline{D}} \dot{\underline{\underline{\xi}}} + \underline{\underline{S}} \underline{\underline{\xi}} = - \underline{\underline{R}} \underline{\underline{p}} + \underline{\underline{R}}' \underline{\underline{g}}_w, \quad (3-21a)$$

$$\underline{\underline{g}}_w = - \rho_0 \underline{\underline{V}} \ddot{\underline{\underline{\xi}}}, \quad (3-21b)$$

$$\underline{\underline{K}} \ddot{\underline{\underline{p}}} + \underline{\underline{D}}_F \dot{\underline{\underline{p}}} + \underline{\underline{L}}_0 \underline{\underline{p}} = - \underline{\underline{W}} \underline{\underline{g}}_w. \quad (3-21c)$$

Hierin sind  $\underline{\underline{\xi}}$ ,  $\underline{\underline{p}}$  und  $\underline{\underline{g}}_w$  die zum  $k$ -ten Kosinusmode gehörenden Strukturfreiheitsgrade, Druck- und Gradientenwerte. Weiter sind  $\underline{\underline{M}}$ ,  $\underline{\underline{D}}$  und  $\underline{\underline{S}}$  wie in (2-13),  $\underline{\underline{R}}$ ,  $\underline{\underline{R}}'$  wie in (2-65) und  $\underline{\underline{W}}$  wie in (2-52) definiert.  $\underline{\underline{L}}_0$  sei derjenige Anteil von  $\underline{\underline{L}}$  aus (2-46), der sich für  $\lambda^2=0$  einstellt. Die Matrizen  $\underline{\underline{K}}$  und  $\underline{\underline{D}}_F$  sind Diagonalmatrizen mit Diagonalelementen  $1/\alpha^2$  und  $2\epsilon/\alpha^2$  entsprechend (2-3). Elimination von  $\underline{\underline{g}}_w$  liefert

$$(\underline{\underline{M}} + \rho_0 \underline{\underline{R}}' \underline{\underline{V}}) \ddot{\underline{\underline{\xi}}} + \underline{\underline{D}} \dot{\underline{\underline{\xi}}} + \underline{\underline{S}} \underline{\underline{\xi}} = - \underline{\underline{R}} \underline{\underline{p}}, \quad (3-22)$$

$$\underline{\underline{K}} \ddot{\underline{\underline{p}}} + \underline{\underline{D}}_F \dot{\underline{\underline{p}}} + \underline{\underline{L}}_0 \underline{\underline{p}} = \rho_0 \underline{\underline{W}} \underline{\underline{V}} \ddot{\underline{\underline{\xi}}}. \quad (3-23)$$

Zunächst ist die geforderte Eigenschaft  $(\rho_0 \underline{\underline{W}} \underline{\underline{V}})^T = \underline{\underline{R}}$  nicht gewährleistet. Diese erhält man aber, wenn man Gl. (3-23) von links mit einer Diagonalmatrix  $\underline{\underline{Q}}$  multipliziert, deren Diagonalelemente gleich dem Maschenvolumen an der Masche  $(\epsilon_{ijk})$  dividiert durch  $\rho_0$  entspricht <sup>x)</sup>. Die so erhaltenen Matrizen

$$\underline{\underline{M}} = \underline{\underline{M}} + \rho_0 \underline{\underline{R}}' \underline{\underline{V}}, \quad \underline{\underline{V}} = \underline{\underline{Q}} \underline{\underline{W}} \underline{\underline{V}}, \quad (3-24a)$$

x) Die Multiplikation mit  $\underline{\underline{Q}}$  bzw.  $\underline{\underline{Q}}$  macht die Division durch das Maschenvolumen rückgängig, die man üblicherweise bei der Ableitung der Differenzengleichungen für das Druckfeld nach Anwendung des Gaußschen Integralsatzes durchführt, vergleiche §A3.2.1.

$$\underline{\underline{K}} = \underline{Q} \underline{K}, \quad \underline{\underline{D}}_F = \underline{Q} \underline{D}_F, \quad \underline{\underline{L}}_0 = \underline{Q} \underline{L}_0 \quad (3-24b)$$

erfüllen die geforderten Voraussetzungen für eine sachgemäße Formulierung. Diese Aussage ist nur durch intensive Detailuntersuchung der Struktur der einzelnen Matrizen belegbar, die hier nicht ausgeführt werden soll. (Ein zentraler Aspekt ist dabei aber das Auftreten der Matrix  $[\hat{V}_{j,m}^{(R)}]$  bei der Berechnung der  $\hat{R}_{m,j}^{(R)}$  in (2-63), wobei diese Gleichung letztlich eine Folge des (2-12) zugrunde liegenden Prinzips der virtuellen Arbeit ist.)

Stattdessen wollen wir die genannten Matrizen für das einfache Modellproblem nach §1.3.1.1, Abb. 1-5 angeben, wo nur ein Strukturfreiheitsgrad  $c$  und ein diskreter Druckwert  $p$  gemäß Maschennetz nach Abb. 3-1 auftritt und die Matrizen daher skalare Werte sind. Die Betrachtung dieses Modellproblems, bei dem wir eine räumliche Diskretisierung analog der im 3D benutzten verwenden, soll die Sachgemäßheit der Formulierung und Bedeutung der Matrizen plausibel machen. Für das Modellproblem erhalten wir:

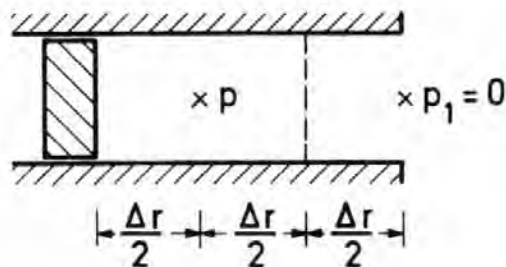


Abb. 3-1 Maschennetz für Modellproblem

$$\underline{\underline{M}} = M, \quad \underline{\underline{D}} = 0, \quad \underline{\underline{S}} = S,$$

$$\underline{\underline{V}} = V = 1, \quad \underline{\underline{R}} = FV, \quad \underline{\underline{R}}' = F \frac{\Delta r}{2} V, \quad \underline{\underline{W}} = \frac{1}{\Delta r}, \quad (3-25)$$

$$\underline{\underline{K}} = 1/a^2, \quad \underline{\underline{D}}_F = \partial e/a^2, \quad \underline{\underline{L}}_0 = 1/(\Delta r)^2.$$

D.h., die diskretisierten Gleichungen lauten

$$\left(M + \varrho V^2 F \frac{\Delta \tau}{2}\right) \ddot{c} + D \dot{c} + S c = -F V p, \quad (3-26)$$

$$\frac{1}{\alpha^2} \ddot{p} + \frac{\alpha}{\alpha^2} \dot{p} + \frac{1}{\Delta \tau^2} p = \varrho_0 \frac{1}{\Delta \tau} V \ddot{c}. \quad (3-27)$$

Multiplizieren wir (3-27) mit  $Q = F \Delta \tau / \varrho_0$  so folgt

$$\frac{F \Delta \tau}{\varrho_0 \alpha^2} \ddot{p} + \frac{\alpha F \Delta \tau}{\varrho_0 \alpha^2} \dot{p} + \frac{F}{\varrho_0 \Delta \tau} p = F V \ddot{c}, \quad (3-28)$$

wo die Faktoren positiv (nicht-negativ) sind und  $\underline{\underline{U}} = FV = \underline{\underline{R}}^T = FV$  ist. D.h., zumindest an diesem Modellproblem ist die sachgemäße Formulierung sofort einsichtig.

Zudem erkennt man in (3-26) die Bedeutung der zusätzlichen Strukturmasse  $\varrho_0 \underline{\underline{R}}^T \underline{\underline{V}}$  in (3-22): es handelt sich hierbei um die auf die Strukturkoordinaten transformierte halbe Masse des Fluids in den Maschen, die die Struktur berühren.

### 3.5 Schlußfolgerungen

Wir stellen also fest, daß die in §2 abgeleiteten gekoppelten Gleichungen wegen (3-6) und (3-13) sachgemäß formuliert sind und daß das gewählte Newmark-Verfahren zur Zeitintegration wegen dieses Ergebnisses und wegen der Ergebnisse des Anhangs 2 eine unbedingt stabile Integration des linearisierten gekoppelten Problems erlaubt.

#### 4. ELEMENTE DES NUMERISCHEN LÖSUNGSVERFAHRENS

##### 4.0 Übersicht

In diesem Kapitel werden einige grundlegende Techniken vorgestellt, mit deren Hilfe das lineare Gleichungssystem (2-66), das z.B. 10 000 Unbekannte umfassen kann, direkt und schnell (z.B. in 10 s auf einer IBM 370/168) gelöst werden kann. Die Grundlagen

- schnelle Kosinus- und Sinus-Transformation
- schnelle elliptische Löser (SEL)
- Einflußmatrixtechnik (EMT)

sind nicht grundlegend neu. Der Beitrag dieser Arbeit liegt hier in einer Reihe von Erweiterungen sowie der geschickten (teils rekursiven) Anwendung zur Lösung der 2D-Teilprobleme und des 3D-Gesamtproblems.

##### 4.1 Grundlage 1: Schnelle Kosinus- und Sinustransformation

Wie in § 2.5.2 und § A3.5 angegeben, benötigen wir numerische Verfahren zur Durchführung der Kosinus- und Sinustransformationen

$$p_j = \sum_{k=0}^K b_k \cos(\pi j k / K) \hat{p}_k, \quad (4-1)$$

$$u_j = \sum_{k=0}^K \sin(\pi j k / K) \hat{u}_k, \quad (4-2)$$

( $b_j = 1/2$  für  $k=0, K$ ;  $b_k = 1$  für  $1 \leq k < K$ ) sowie deren Umkehrungen (die sich allein um den Faktor  $2/K$  unterscheiden). Diese Reihen sind für jeden Index  $i, j$  des 2D-Maschennetzes bei jedem Zeitschritt mehrfach auszuwerten, so daß die hierfür notwendige Rechenzeit möglichst klein zu halten ist.

Die direkte Auswertung erfordert  $K^2$  Multiplikationen ( $K$  Summen aus je  $K$  Produkten). Das mindeste, was man hier zur Steigerung der Effektivität tun kann, ist die Vorabberechnung der  $2K$  Faktoren

$$C_j = \cos(\pi j / K), \quad S_j = \sin(\pi j / K), \quad j=0, 1, \dots, 2K-1 \quad (4-3)$$

und Ausnutzung der Periodizität mittels der Modulo-Funktion:

$$\begin{aligned} \cos(\pi j k / K) &= C_{(jk, \text{mod } 2K)} \\ \sin(\pi j k / K) &= S_{(jk, \text{mod } 2K)} \end{aligned} \quad (4-4)$$

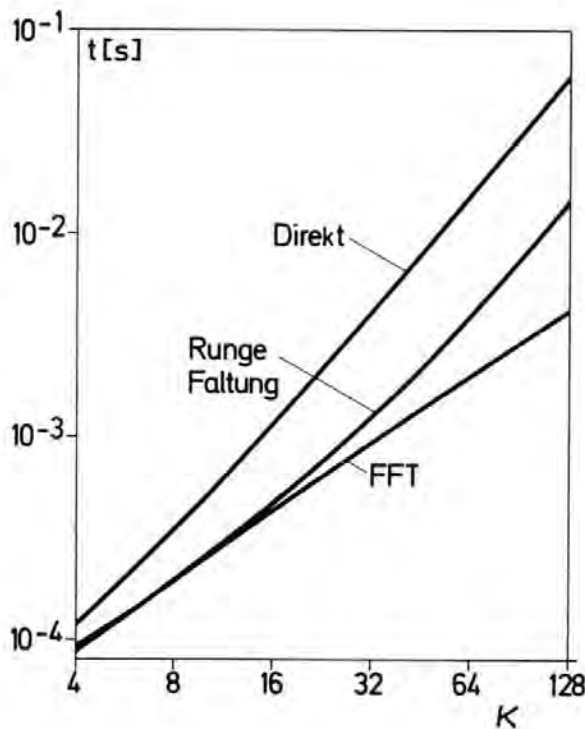


Abb. 4-1 Rechenzeiten  
in s IBM 370/168 für  
verschiedene Kosinus-  
Transformations-  
Algorithmen

Falls  $K$  eine gerade Zahl ist, kann die Symmetrie

$$\begin{aligned} \cos(\pi j k / K) &= -\cos(\pi (K-j) k / K) \\ \sin(\pi j k / K) &= \sin(\pi (K-j) k / K) \end{aligned} \quad (4-5)$$

ausgenutzt werden. Das resultierende Verfahren ist als Runge-Faltung [83, S. 364-370] bekannt und erfordert lediglich  $K^2/2$  Multiplikationen.

Falls  $K \geq 4$  und eine Potenz von zwei ist, dann führt eine konsequente Ausnutzung der Eigenschaften (4-4,5), wonach nicht  $K^2$ , sondern nur  $K/2$  verschiedene Faktoren auftreten, zur schnellen Fourier-Transformation (FFT) [84\_7], bei der die Anzahl der Multiplikationen lediglich  $\approx 4 K \log_2(K/2)$  beträgt. Dies ist für  $K \geq 8$  theoretisch und für  $K \geq 32$  bei Berücksichtigung der aufwendigeren Programmlogik das schnellste Verfahren, siehe Abb. 4-1. Das Problematische an dieser Methode liegt in der Reduktion der Kosinus-/Sinus-Reihen auf eine allgemeine trigonometrische Reihe, da nur hierfür FFT-Algorithmen in den üblichen Bibliotheken (z.B. [85\_7]) vorliegen. Die dazu erforderlichen Pre- und Post-Prozesse sind in [86\_7] angegeben, so daß die Aufgabe hier letztlich in der geeigneten Programmierung entsprechender PL/1-Unterprogramme bestand.

## 4.2 Grundlage 2: Schneller elliptischer Löser POISTP

### 4.2.1 Einleitung

Wenn man zunächst von inneren Einbauten absieht, dann ist für jeden Kosinus-Mode eine Differentialgleichung der Form

$$a(x) \frac{\partial}{\partial x} \left[ b(x) \frac{\partial u}{\partial x} \right] + c(x) u + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = v(x, y) \quad (4-6)$$

auf dem Rechteck gemäß Abb. 4-2 mit Neumann- oder Dirichlet-Randbedingungen zu lösen. Diskretisierung auf dem staggered grid mit  $M \times N$  inneren Maschen liefert, wie in § A6.1 beschrieben, das blocktridiagonale Gleichungssystem

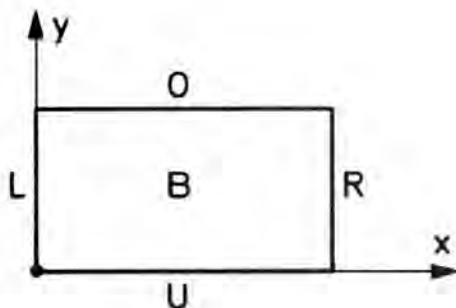


Abb. 4-2 Das Gebiet B mit den vier Randstücken (Links, Rechts, Oben, Unten)



$$\begin{bmatrix} (A - \gamma_U I) & -I & & & \\ & -I & A & -I & \\ & & \cdot & \cdot & \cdot \\ & & & -I & A & -I \\ & & & & -I & (A - \gamma_O I) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_N \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_N \end{Bmatrix}, \quad (4-7)$$

wobei  $A$  eine tridiagonale  $M \times M$  Matrix und  $I$  die  $M \times M$  Einheitsmatrix ist, sowie  $\gamma_U, \gamma_O$  Parameter, die Null sind bei Dirichlet- und eins bei Neumann-Randbedingungen am oberen bzw. unteren Rand gemäß Abb. 4-2. Die Unbekannten  $u_j$  und rechten Seiten  $v_j$  ( $j=1, 2, \dots, N$ ) sind  $M$ -Vektoren. In § A6.1 ist insbesondere die Berücksichtigung von Randwerten ungleich Null beschrieben (die schon manchem neuen Anwender des nachfolgenden Verfahrens zunächst Verständnisschwierigkeiten bereitet haben).

Zur Lösung des Systems (4-7) wird in FLUX ein neu entwickeltes PL/1-Unterprogramm POISTP (POISSon solver, Truncated in PL/1) verwendet. POISTP ist eine Verallgemeinerung des in [64\_7] allein für  $\gamma_U = \gamma_O = 1$  beschriebenen Programms, das auf zyklischer Reduktion beruht. Seine wesentlichen Vorteile gegenüber anderen Verfahren sind:

- Dirichlet- und Neumann-Randbedingungen (letztere für staggered grids) können an den vier Randstrecken in beliebiger Kombination vorgegeben werden.
- Es gibt keine Beschränkung der Werte  $M$  und  $N$  außer  $M \geq 2, N \geq 2$  (im Gegensatz zu dem "klassischen" Buneman-Verfahren [55\_7] wo  $N = 2^k - 1$  sein muß,  $k$  ganz).
- Die Anzahl der "Punkt-Operationen" (Multiplikationen bzw. Divisionen) steigt (für große Werte von  $M$  und  $N$ ) höchstens wie  $5MN \log_2 N$

- Falls die Matrix diagonal dominant ist, d.h., falls der Helmholtzparameter  $\lambda^2$  ( $\equiv -C(x)$  in 4-6) groß ist, kann die Rechnung auf Kosten vernachlässigbarer Fehler verkürzt und so der Rechenaufwand bis auf 5 MN Operationen reduziert werden. Diese Technik basiert auf den Untersuchungen von Buzbee [65, 55] und ist als abgebrochene ("truncated") zyklische Reduktion bekannt.

Alle diese prinzipiellen Eigenschaften machen POISTP ideal geeignet für den Einsatz in FLUX. Zusätzlich sind folgende Programmiertechniken erwähnenswert:

- die in POISTP verwendeten Unterprogramme zur Lösung tridiagonaler Gleichungssysteme wurden außer in PL/1 auch in Assembler (von Herrn A. Steil) programmiert. In diesen Unterprogrammen wird etwa 90 % der gesamten Rechenzeit verbraucht. Die Assembler-Version brachte eine Rechenzeit-Reduktion um 10 bis 30 %.
- auf die in [64] beschriebene Technik zur Einsparung des Arbeitsfeldes  $P_j$  wurde verzichtet, da der Platzbedarf für dieses Feld häufig kleiner ist als der Platzbedarf für den komplizierteren Rechencode.
- auf formale Überprüfungen der Eingabe sowie auf die in [64] enthaltene Variante für periodische Randbedingungen wurde verzichtet, da diese hier nicht benötigt werden und nur unnötig Platz bzw. Rechenzeit kosten.

Eine Fortran-Variante POISSX ohne die Abbruchstechnik, aber mit periodischen Randbedingungen in x-Richtung ist, wie in [87] angegeben, erhältlich.

#### 4.2.2 Verfahrens-Prinzip

Das Prinzip der zyklischen Reduktion ist in [55] beschrieben und wurde auch vom Autor verschiedentlich erläutert [58, 88]. Das Neue besteht hier in der Erfassung der Randbedingungen am oberen und unteren Rand, der Behandlung beliebiger Maschenzahlen

$N \geq 2$  sowie der abgebrochenen zyklischen Reduktion. Die genaue Algorithmus-Beschreibung ist, soweit sie von den Angaben in [64] abweicht, in § A6.2 angegeben. Was hier vielleicht nützlich ist, ist eine Kurzbeschreibung, aus der die Besonderheiten des Verfahrens verständlich werden.

Die zyklische Reduktion besteht aus zwei Phasen: der Reduktions- und Rücksubstitutions-Phase. Jede Phase enthält mehrere Schritte. In der Reduktionsphase wird in jedem Schritt durch Linearkombination benachbarter Gleichungen jede zweite Unbekannte eliminiert. Das reduzierte Gleichungssystem hat dann die gleiche Prinzipform wie das Ausgangssystem, so daß ein nächster Reduktionsschritt nach gleichem Schema angewandt werden kann, bis nach etwa  $\log_2 N$  Reduktionsschritten eine (Block-) Gleichung für eine Unbekannte übrigbleibt, aus der diese Unbekannte mittels Gauß-Elimination (GE) berechnet werden kann. Damit beginnt die Rücksubstitutionsphase: Die zuletzt ermittelten Lösungen werden in die vorhergehenden Gleichungssysteme eingesetzt, wobei jetzt weitere Unbekannte sich aus einfachen (Block-) Gleichungen berechnen lassen.

Dieser Algorithmus gestaltet sich besonders einfach für  $\gamma_0 = \gamma_\infty = 0$  und  $N = 2^{k+1} - 1$ . Wenn dagegen diese Voraussetzungen nicht gegeben sind, erfordern die ersten und letzten Gleichungen eine gesonderte Behandlung, die je nach gerader oder ungerader Zahl von Unbekannten  $N$  unterschiedlich ist.

Diese Vorgehensweise läßt sich an folgendem Beispiel mit  $N = 6$ , also einem geraden Wert, verdeutlichen. Bei ungeradem  $N$  ist das Verfahren einfacher. Wir haben folgendes Ausgangssystem:

$$\begin{bmatrix} K & -I & & & & \\ -I & A & -I & & & \\ & -I & A & -I & & \\ & & -I & A & -I & \\ & & & -I & A & -I \\ & & & & -I & B/C \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \\ u_5 \\ u_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \\ v_5 \\ v_6 \end{bmatrix} \quad (4-8)$$

mit  $K = (A - \gamma_0 I)$ ,  $B = (A - \gamma_0 I)$ ,  $C = I$ .

Wir multiplizieren die 1., 3. und 5. Zeile mit  $A$  und - als Ausnahme - die 6. mit  $ACB^{-1}$  und addieren zur 1. die 2. Zeile und zur 3. und 5. die jeweils vorhergehende und folgende Zeile. Dann lautet das Resultat

$$\begin{bmatrix} K^{(1)} & -I & & \\ -I & A^{(1)} & -I & \\ & -I & B^{(1)}C^{(1)-1} & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_3 \\ u_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_1^{(1)} \\ v_3^{(1)} \\ v_5^{(1)} \end{bmatrix}, \quad (4-9)$$

wobei  $K^{(1)} = AK - I$ ,  $A^{(1)} = A^2 - 2I$ ,

$$B^{(1)} = BA^2 - B - AC,$$

$$C = B.$$

(Auf die rechten Seiten gehen wir in diesem Beispiel nicht ein.) Hier ist also jede zweite Unbekannte eliminiert. Das resultierende Gleichungssystem hat die gleiche Form wie das Ausgangssystem und ein ähnlicher Reduktionsschritt (allerdings nun für ungerades  $N$ ) kann sich anschließen.

Entscheidend für die Effektivität des Verfahrens ist die Tatsache, daß die Matrizen  $K^{(r)}$ ,  $A^{(r)}$ ,  $B^{(r)}$  und  $C^{(r)}$ , wie oben für  $r=1$  angegeben, nicht durch Matrizenmultiplikation bzw. gar Inversion berechnet werden müssen, sondern von vornherein theoretisch in Form von Polynomen in  $A$  angebar sind. So ist z.B.  $A^{(1)} = (A - \sqrt{2}I)(A + \sqrt{2}I)$  und ähnliche Ausdrücke lassen sich auch für die anderen Matrizen angeben.

Unter Ausnutzung dieser Faktorisierung können Gleichungssysteme der Form

$$BC^{-1}x = y \quad \text{bzw.} \quad Bx = Cy, \quad (4-10)$$

mit

$$B = \prod_{r=1}^k (A - \lambda_r I), \quad C = \prod_{r=1}^l (A - \mu_r I), \quad l \leq k$$

und den theoretisch bestimmten Wurzeln  $\lambda_r, \mu_r$  in eine Folge tridiagonaler Systeme zerlegt werden:

$$\begin{aligned} z_0 \equiv y, \quad (A - \lambda_1 I)(z_1 - z_0) &= (\lambda_1 - \mu_1) z_0 \\ (A - \lambda_2 I)(z_2 - z_1) &= (\lambda_2 - \mu_2) z_1 \\ &\vdots \\ (A - \lambda_\ell I)(z_\ell - z_{\ell-1}) &= (\lambda_\ell - \mu_\ell) z_{\ell-1} \\ (A - \lambda_{\ell+1} I) z_{\ell+1} &= z_\ell \\ &\vdots \\ (A - \lambda_k I) z_k &= z_{k-1}, \quad x \equiv z_k \end{aligned} \quad (4-11)$$

Jedes Teilsystem kann mittels Gauß-Elimination mit  $5M$  Punkt-Operationen gelöst werden; insgesamt wird (4-10) also mit  $5Mk$  Operationen gelöst, wobei  $k$  höchstens von der Ordnung  $N$  ist.

#### 4.2.3 Abgebrochene zyklische Reduktion

Wir wollen an dem Beispiel die Bedeutung großer Helmholtzparameter  $\lambda^2$  studieren. Je größer  $\lambda^2$  ist, um so stärker diagonal-dominant ist  $A$ . In der Tat ist der kleinste Eigenwert von  $A$  größer als  $\lambda^2$ . D.h.  $A^{(1)}$  hat einen kleinsten Eigenwert größer als  $\lambda^4$  und so nehmen die Eigenwerte mit jedem Reduktionsschritt rasch zu. Das bedeutet aber schließlich, daß die Einheitsmatrix  $I$  vernachlässigbar klein wird gegenüber den Diagonalmatrizen. Streicht man die Nebendiagonalen, so macht man einen Fehler, der von  $\lambda^2$  abhängt und bei genügend großem  $\lambda^2$ , z.B. gegenüber Rundungsfehler, vernachlässigbar klein wird. Man kann dann die Reduktionsphase schon nach z.B.  $\ell < \log_2 N$  Schritten abbrechen, bevor sie zur Reduktion auf eine Unbekannte geführt hat und so den Rechenaufwand erheblich einschränken. Diese Idee wurde von Buzbee [65] quantitativ anhand Buneman's zyklischer Reduktion (also für  $\gamma_0 = \gamma_0 = 0$ ,  $N = 2^{k+1} - 1$ ) untersucht und dabei gezeigt, daß die Reduktion nach dem  $\ell$ -ten Reduktionsschritt, bei dem

$$2^\ell \geq \frac{1 - \ln(\varepsilon)}{\operatorname{arccosh}(1 + \lambda^2/2)} \quad (4-12)$$

ist, abgebrochen werden darf, wenn  $\varepsilon$  der zulässige relative Fehler ist. Der Autor hat in [88\_7] eine vereinfachte Ableitung dieser Formel angegeben. Da die Eigenwerte der Matrizen  $K$  und  $B \cdot C^{-1}$  ebenfalls größer als  $\lambda^2$  sind, läßt sich Buzbee's Ergebnis unmittelbar auf das vorliegende Verfahren übertragen.

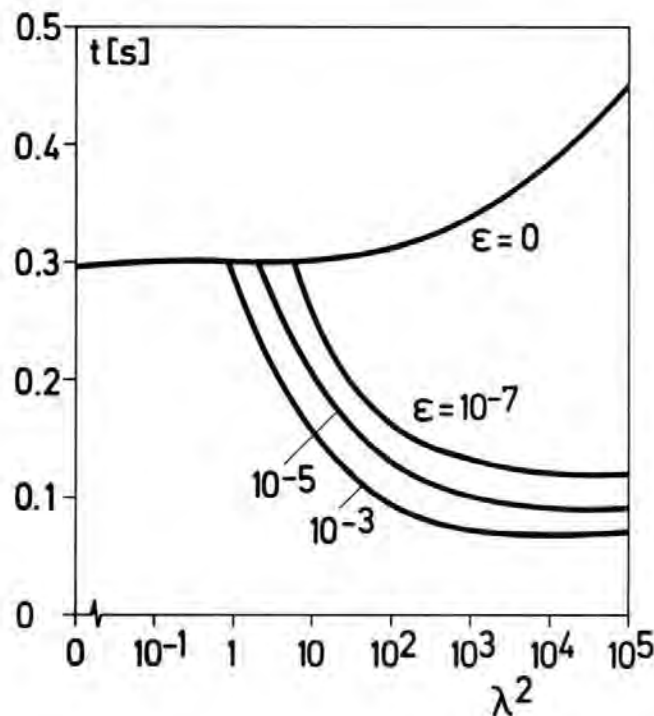


Abb. 4-3 Rechenzeit von POISTP als Funktion des kleinsten Eigenwertes  $\lambda^2$  für verschiedene Abbruchkriterien

Abb. 4-3 zeigt den Einfluß des Abbruchkriteriums für verschiedene Werte von  $\lambda^2$  auf die resultierende Rechenzeit. Die Rechnungen wurden für das in [88, 89\_7] beschriebene Standardproblem mit  $M = 132$ ,  $N = 33$  durchgeführt. Die tatsächlichen Abweichungen der berechneten Lösung von der wahren wurden durch Vergleich mit verschiedenen exakten Lösungen ermittelt; sie waren stets kleiner als  $2\varepsilon$  bzw. kleiner als der Rundungsfehler für  $\varepsilon = 0$ . Dies entspricht Buzbee's Erfahrungen [65\_7].



Wenn  $\underline{L} \underline{u} = \underline{v}$  das ursprüngliche Gleichungssystem entsprechend (4-7, A5-9) ist, aber die mit abgebrochener Reduktion bestimmte Lösung eigentlich ein System  $\underline{L}' \underline{u} = \underline{v}$  erfüllt, dann muß sichergestellt sein, daß  $\underline{L}'$  die für eine stabile Integration des Gesamtproblems erforderlichen Eigenschaften hat, z.B. muß  $\underline{L}'$  wie  $\underline{L}$  positiv definit sein. Ohne daß diese Frage schlüssig untersucht wurde, wird mit Rücksicht auf die großen kleinsten Eigenwerte  $\lambda^2$  von  $\underline{L}$ , die sich nur um wenig ändern, davon ausgegangen, daß diese Bedingung erfüllt ist. Praktische Erfahrungen in den Anwendungen haben an dieser Aussage keine Zweifel aufkommen lassen.

#### 4.3 Grundlage 3: Einfluß-Matrix-Technik, EMT (Capacitance Matrix Technique)

##### 4.3.1 Das Problem

Wie einleitend in § 1.3 dargestellt, sind SEL generell nur bei separierbaren Problemen anwendbar. Der im vorhergehenden Kapitel beschriebene spezielle SEL vermag sogar nur Gleichungssysteme vom Typ (4-7) zu lösen, die aus der Helmholtzgleichung (4-6) auf einem Rechteck resultierten.

Auf unregelmäßig umrandeten Gebieten oder bei Randbedingungen, deren Typ entlang den Seiten des Rechtecks variiert, oder bei Randbedingungen, die selbst Unbekannte enthalten, die durch simultane Lösung weiterer linearer Gleichungen bestimmt werden (hier z.B. aufgrund der Strukturdynamik), hat das Gleichungssystem nicht mehr die erforderliche Form. Allerdings, die Mehrzahl der Gleichungen, insbesondere die zu inneren Maschen gehörenden Differenzengleichungen, hat auch bei derartigen "unregelmäßigen" Problemen die für SEL erforderliche regelmäßige Struktur. Es sei  $n$  die Gesamtzahl der Gleichungen (in 2D ist  $n \approx M \times N$ ) und  $m$  die Anzahl der Gleichungen, die die erforderliche regelmäßige Struktur stören.

Wie bereits in § 1.3.2.2 angedeutet, kann die Lösung  $\underline{u}$  des unregelmäßigen "A-Problems"

$$\underline{A} \underline{u} = \underline{v} \quad (4-13)$$

( $\underline{A}$  =  $n \times n$  Matrix,  $\underline{v}$  Vektor der gegebenen Quellverteilung) berechnet werden, indem zuvor eine von  $\underline{v}$  unabhängige  $m \times m$  "Einflußmatrix"  $\underline{C}$  bestimmt und dann für jedes  $\underline{v}$  zweimal ein "B-Problem" ( $\underline{B} \underline{x} = \underline{y}$ ) gelöst wird. Dabei ist  $\underline{B}$  (eventuell nach einer Umsortierung) gleich  $\underline{A}$  bis auf  $m$  Zeilen, aber mittels eines SEL invertierbar

#### 4.3.2 Formale Beschreibung

Diese Technik wurde bereits häufig [57, 62, 90] auch vom Autor [58, 105] erläutert und angewandt [8, 58, 61, 66]. Wir wollen die Methode hier formal unter Berücksichtigung der Tatsache formulieren, daß bei inneren Einbauten in dem betrachteten Rechteck die Größen innerhalb der ausgeblockten Maschen für das A-Problem nicht interessieren (so z.B. in den Maschen, die den Massering abdecken, siehe Abb. 2-3) und das B-Problem also, z.B.  $\ell$ , zusätzliche Unbekannte mehr behandelt.

Üblicherweise stellt man diese Methode unter Benutzung von Teilmatrizen dar, wobei man eine Permutation der Gleichungen unterstellt, so daß:

$$\underline{A} = \begin{array}{|c|c|} \hline \underline{A}_1 & \underline{O}_1 \\ \hline \underline{A}_2 & \underline{O}_2 \\ \hline \end{array} \quad \underline{B} = \begin{array}{|c|c|} \hline \underline{B}_1 & \underline{O}_2 \\ \hline \underline{A}_2 & \underline{O}_2 \\ \hline \underline{B}_3 & \\ \hline \end{array} \quad (4-14)$$

$\begin{array}{cc} n & \ell \end{array}$ 
 $\begin{array}{cc} m & (n-m) \\ \ell & (n+\ell) \end{array}$

( $\underline{O}_1, \underline{O}_2$  sind Nullmatrizen,  $\underline{B}_1$  und  $\underline{B}_3$  sind so zu wählen, daß  $\det(\underline{B}) \neq 0$  und  $\underline{B}$  schnell lösbar mittels eines SEL)



Entsprechend zerlegen wir die rechte Seite

$$\underline{v} = \begin{array}{c} \boxed{\underline{v}_1} \quad m \\ \boxed{\underline{v}_2} \quad (n-m) \\ 1 \end{array} \quad (4-15)$$

Wenn zudem eine "Selektionsmatrix"

$$\underline{W} = \begin{array}{c} \boxed{\underline{W}_1} \quad m \\ \boxed{\underline{W}_2} \quad (n-m) \\ \boxed{\underline{W}_3} \quad \ell \\ m \end{array} \quad (4-16)$$

definiert ist, wobei  $\underline{W}_1$  zunächst beliebig positiv definit gewählt werden kann (in der Regel  $\underline{W}_1$  = Einheitsmatrix) und  $\underline{W}_2, \underline{W}_3$  Nullmatrizen sind, dann lautet die  $m \times m$  Einflußmatrix

$$\underline{C} = \begin{array}{cc} \boxed{\underline{A}_1} & \boxed{\underline{O}_1} \\ n & \ell \end{array} \cdot \underline{B}^{-1} \underline{W} \equiv \underline{A}_1^0 \underline{B}^{-1} \underline{W} \quad (4-17)$$

Die Berechnung von  $\underline{C}$  erfordert  $m$  Lösungen eines  $B$ -Problems. In der Vorbereitungsphase wird  $\underline{C}$  in eine untere ( $L$ ) und obere ( $O$ ) Dreiecksmatrix faktorisiert [82, S.227], um später Gleichungssysteme  $\underline{C} \underline{w} = \underline{z}$  mit  $m^2$  Operationen lösen zu können.

Wenn  $\underline{C}$  bekannt ist, dann berechnet man die Lösung des  $A$ -Problems wie folgt:

1) Man definiert einen Vektor

$$\underline{\bar{v}} = \begin{array}{c} \boxed{\underline{\bar{v}}_1} \quad m \\ \boxed{\underline{\bar{v}}_2} \quad (n-m) \\ \boxed{\underline{\bar{v}}_3} \quad \ell \\ 1 \end{array} \quad (4-18)$$

wobei  $\bar{v}_1$  und  $\bar{v}_3$  zunächst beliebig sind und in der Praxis zumeist  $\bar{v}_1 = v_1, \bar{v}_3 = 0$  gesetzt wird. Hierzu berechnet man die vorläufige Lösung  $\bar{u}$  aus

$$\underline{B} \bar{u} = \bar{v}. \quad (4-19)$$

2) Man stellt den  $m$ -Vektor des Restfehlers  $w$  fest:

$$w = \underline{A}_1^0 \bar{u} - v_1 \quad (4-20)$$

und löst dann

3) ein zweites  $B$ -Problem mit korrigierter rechter Seite:

$$\underline{B} \bar{u} = \bar{v} \equiv \bar{v} - \underline{W} \underline{C}^{-1} w. \quad (4-21)$$

Dies liefert die gesuchte Lösung  $u$  in den ersten  $n$  Komponenten von  $\bar{u}$

$$\bar{u} = \begin{array}{|c|} \hline u \\ \hline u_3 \\ \hline \end{array} \begin{array}{l} n \\ , \\ l \end{array} \quad (4-22)$$

wobei  $u_3$  nicht weiter interessiert.

Zum Beweis vermerken wir, daß die zu  $v_2$  gehörenden Zeilen des  $A$ -Problems sicher erfüllt sind, da die entsprechenden Komponenten von  $\bar{v}$  gleich  $v_2$  sind, die entsprechenden Zeilen und Spalten von  $\underline{B}$  gleich  $\underline{A}_2$  sind und  $\underline{Q}_2$  eine Nullmatrix ist. Daß auch die ersten  $m$  Zeilen des  $A$ -Problems erfüllt sind, kann wie folgt gezeigt werden (Nummern über Gleichheitszeichen bezeichnen die zugrunde liegende Gleichung):

$$\begin{aligned}
 \underline{A}_1 \underline{u} &\stackrel{17,22}{=} \underline{A}_1^0 \underline{\bar{u}} \stackrel{21}{=} \underline{A}_1^0 \underline{B}^{-1} (\underline{\bar{v}} - \underline{W} \underline{C}^{-1} \underline{w}) \\
 &\stackrel{17}{=} \underline{A}_1^0 \underline{B}^{-1} \underline{\bar{v}} - \underline{w} \\
 &\stackrel{20}{=} \underline{A}_1^0 \underline{B}^{-1} \underline{\bar{v}} - \underline{A}_1^0 \underline{\bar{u}} + \underline{v}_1 \\
 &\stackrel{19}{=} \underline{A}_1^0 \underline{B}^{-1} \underline{\bar{v}} - \underline{A}_1^0 \underline{B}^{-1} \underline{\bar{v}} + \underline{v}_1 \\
 &= \underline{v}_1 .
 \end{aligned}
 \tag{4-23}$$

D.h., die ersten  $m$  Zeilen sind erfüllt für beliebiges  $\underline{\bar{v}}_1, \underline{\bar{v}}_3, \underline{W}_1$ .

#### 4.3.3 Behandlung singulärer Probleme

##### 4.3.3.1 $\det(\underline{A}) = 0, \det(\underline{B}) \neq 0$

Wenn  $\underline{A}$  singular ist ( $\det(\underline{A}) = 0$ ) mit Rangabfall eins, d.h., wenn genau ein Eigenwert, z.B.  $\lambda^{(i)}$  aus der Menge der  $n$  Eigenwerte  $\lambda^{(i)}$  in

$$\underline{A} \underline{x}_i = \lambda^{(i)} \underline{x}_i, \quad i = 1, 2, \dots, n
 \tag{4-24}$$

gleich Null ist, dann liefert die EMT eine der unendlich vielen Lösungen des  $A$ -Problems, falls überhaupt eine existiert. Notwendige Voraussetzung für die Existenz einer Lösung ist folgende "Konsistenzbedingung" [88\_7]

$$\underline{v} \cdot \underline{x}_1 = 0 .
 \tag{4-25}$$

Diese Forderung folgt aus einer Eigenvektor-Zerlegung

$$\underline{v} = \sum_{i=1}^n \hat{v}_i \underline{x}_i, \quad \underline{u} = \sum_{i=1}^n \hat{u}_i \underline{x}_i, \quad (4-26)$$

die anstelle des  $A$  -Problems  $\underline{A}\underline{u}=\underline{v}$  den Satz linearer Gleichungen

$$\lambda^{(i)} \hat{u}_i = \hat{v}_i. \quad (4-27)$$

liefert. Nun muß für  $\lambda^{(1)}=0$  offensichtlich  $\hat{v}_1=0$  sein und also zumindest (4-25) gelten. Diese Voraussetzung ist auch hinreichend, wenn die Eigenvektoren ein Orthogonalsystem bilden, was wir hier unterstellen.

In FLUX tritt ein singuläres Problem bei der Berechnung des Potentialfeldes auf. Die Singularität ist sofort aus der Tatsache einsichtig, daß wegen  $\underline{u}=\text{grad}\Phi$  auch  $\Phi=\text{const}$  eine Lösung ist.

Schon von den Differentialgleichungen her kannten wir eine Konsistenzbedingung, siehe § A1.3. Dort mußte das Volumenintegral über die Quellverteilung bei homogenen Randbedingungen verschwinden. Wenn das Integral ersetzt wird durch eine diskrete Approximation, dann entspricht dem Integral ein Skalarprodukt des Quellenvektors mit einem Vektor  $\underline{x}_1$ , dessen Komponenten gleich den diskreten Maschenvolumina sind.

Damit kann die Konsistenzbedingung (4-25) numerisch überprüft werden. Sie ist in FLUX bis auf Rundungsfehler erfüllt. Damit sind auch singuläre  $A$  -Probleme lösbar.

#### 4.3.3.2 $\det(\underline{A})$ beliebig, $\det(\underline{B})=0$

Sollte  $\underline{B}$  singulär sein, dann ist die beschriebene EMT nicht anwendbar. Eine relativ komplizierte Technik zur Lösung solcher Fälle ist in [57\_7] beschrieben. Wir wollen hier eine sehr viel einfachere Methode beschreiben.

Wir wollen unterstellen, daß das Ersatzproblem für  $\underline{A}$  eine singuläre Matrix  $\underline{B}$  enthält, wobei  $\underline{B}$  mittels eines SEL gelöst werden kann. Sodann kann man die Tatsache ausnutzen, daß alle SEL bei singulären Problemen eigentlich nicht  $\underline{B}$ , sondern eine andere Matrix  $\underline{B}'$  invertieren, die sich von  $\underline{B}$  in einer Zeile oder in einer Linearkombination von Zeilen (letzteres ist die Regel) derart unterscheidet, daß  $\det(\underline{B}') \neq 0$  [88\_7]. Dies ist zulässig, da, wie oben erläutert, ein Vektor  $\underline{u}$ , der Lösung des nicht-singulären Problems  $\underline{B}'\underline{u} = \underline{v}$  ist, auch eine Lösung des singulären Problems  $\underline{B}\underline{u} = \underline{v}$  darstellt, unter der Voraussetzung, daß  $\underline{v}$  konsistent ist mit  $\underline{B}$ .

Wenn also statt der singulären Matrix  $\underline{B}$  die nicht-singuläre Matrix  $\underline{B}'$  in der EMT verwendet wird, dann erfüllt das Ergebnis auch die singulären Gleichungen, wenn nur dafür gesorgt wird, daß alle rechten Seiten, auf die  $\underline{B}'^{-1}$  angewandt wird, konsistent sind mit  $\underline{B}$ .

Dies läßt sich durch entsprechende Konstruktion der (ja noch beliebigen) Matrix  $\underline{W}_1$  in (4-16) und Vektoren  $\underline{\bar{v}}_1$  und  $\underline{\bar{v}}_3$  in (4-18) erreichen.

Diese (bisher unveröffentlichte) Technik war Voraussetzung der in [61] berichteten erfolgreichen Lösung singulärer Strömungsprobleme mit REMAC.

#### 4.3.4 Abgebrochene Einfluß-Matrix-Technik

Wenn  $\underline{W}_1$ ,  $\underline{B}$  und  $\underline{A}$  diagonal dominant sind, dann gilt dies auch für die Einfluß-Matrix  $\underline{C}$ .

Diese Aussage wurde zunächst empirisch gefunden und kann für den Extremfall, daß die drei erstgenannten Matrizen Diagonalmatrizen sind, unmittelbar eingesehen werden. Ein allgemein gültiger Beweis wurde bisher nicht gefunden. Das genannte Ergebnis kann aber auch anschaulich wie folgt verstanden werden:

Das Element  $C_{ij}$  sagt für  $\underline{W}_1 = \underline{I}$  aus, welche Änderung die i-te Komponente von  $\underline{A}\underline{u}$  erfährt, wenn  $\underline{u}$  das Resultat zu

$\underline{B}\underline{u}=\underline{v}$  ist und die  $j$ -te Komponente von  $\underline{v}$  um eins vergrößert wird (vergl. 4-17). Wenn aber die  $i$ -te Komponente von  $\underline{u}$  nur schwach von der  $j$ -ten Komponente von  $\underline{v}$  abhängt, und  $\underline{A}$  diagonal dominant ist, dann ist  $C_{ij}$  sehr klein.

In FLUX ist  $\underline{W}_1 = \underline{I}$  und  $\underline{A}$  und  $\underline{B}$  sind diagonal dominant, wenn der Helmholtzparameter  $\lambda^2$  groß ist (also bei kleinen Werten von  $(\alpha \Delta t)^2$ ).

Nimmt man Fehler etwa der Ordnung  $\varepsilon$  in Kauf, dann kann man Elemente  $C_{ij}$  für die  $|C_{ij}| < \varepsilon / |C_{ii}|, i=1,2,\dots,m$  (ohne Summierung) vernachlässigen. (Hier wäre vielleicht eine genauere Aussage möglich, die jedoch nicht untersucht wurde.) Bei geschickter Sortierung der irregulären Gleichungen, so daß räumlich benachbarte Orte zu benachbarten Gleichungen in  $\underline{A}\underline{u}=\underline{v}$  führen, hat dies zur Folge, daß  $\underline{C}$  einer Bandmatrix entspricht.

Die Ausnutzung dieser Eigenschaft mit entsprechend konstruierten L-U-Zerlegungsprogrammen führt zu einer Reduktion des Speicherbedarfs, der je nach Fall ca. 50 % ausmacht. Da die Kapazitätsmatrix in FLUX den größten Teil der vorabzuberechnenden Felder ausmacht, schlägt dieser Effekt deutlich merkbar zu Buche. Darüber hinaus ergibt sich eine geringe Rechenzeitreduktion. Die Fehler in der Lösung waren für Werte von  $\varepsilon$  in der Größenordnung der Maschinengenauigkeit praktisch nicht merklich. Diese Erfahrung spricht im übrigen für die numerische Stabilität der EMT in den vorliegenden Anwendungen.

#### 4.4 Anwendung 1: Lösung der 2D-Probleme mittels EMT, Hauptachsentransformation und SEL

Die Kosinus-Transformation liefert aus den in (2-66) eingerahmten Gleichungen für den Druckbehälterbereich, wie in § 2.5.2 beschrieben, einen Satz ( $k=0,1,\dots,K$ ) entkoppelter 2D-Probleme. Wenn wir die zur Kennzeichnung modaler Größen verwendeten Dächer und Indizes  $k$  weglassen, dann lauten die Gleichungen

$$\begin{bmatrix} \underline{F}_1 & -\underline{f}_2 \underline{R}' & \underline{f}_2 \underline{R} \\ \underline{f}_3 \underline{V} & \underline{I} & 0 \\ 0 & \underline{W} & \underline{L} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \underline{c} \\ \underline{q}_w \\ \underline{p} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \underline{z}_c \\ -\underline{z}_g \\ \underline{q}' \end{Bmatrix}, \quad (4-28)$$

wobei  $\underline{q}'$  die Kosinustransformation von  $\underline{q} - \underline{N} \underline{p}_s$  ist (siehe 2-66). Hier wird zunächst angenommen, daß  $\underline{q}'$  bekannt sei. (Im Falle des Potentialfeldes ist  $\underline{q}_w$  bekannt und das 2D-Problem reduziert sich auf die Lösung der Gleichungen  $\underline{L} \underline{p} = \underline{q}' - \underline{W} \underline{q}_w$ .)

Die Anwendung schneller Lösungsverfahren wird durch die Teilmatrizen  $\underline{R}'$  und  $\underline{R}$  sowie durch die (infolge der inneren Einbauten) unregelmäßige Struktur der Matrix  $\underline{L}$  behindert, wobei  $\underline{L}$ , wie in § 2.5.3 dargestellt, dem diskreten Helmholtz-Operator entspricht.

Das System (4-28), das "2D-A-Problem", kann mittels der EMT gelöst werden. Dazu definieren wir

$$\begin{bmatrix} \underline{F}_1 & 0 & 0 \\ \underline{f}_3 \underline{V} & \underline{I} & 0 \\ 0 & \underline{W} & \underline{L}' \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \underline{\bar{c}} \\ \underline{\bar{q}}_w \\ \underline{\bar{p}} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \underline{q}_c \\ \underline{q}_g \\ \underline{q} \end{Bmatrix} \quad (4-29)$$

als das "2D-B-Problem", das aus (4-28) durch Nullsetzen von  $\underline{R}$  und  $\underline{R}'$  sowie durch Abänderung der Matrix  $\underline{L}$  in eine direkt mittels SEL behandelbare Matrix  $\underline{L}'$  entsteht. ( $\underline{L}'$  wird unten definiert). Für gegebene rechte Seiten  $(\underline{q}_c, \underline{q}_g, \underline{q})$  wird dies B-Problem in folgenden Schritten gelöst:

$$a) \quad \underline{F}_1 \underline{\bar{c}} = \underline{q}_c \quad (4-30)$$

kann schnell nach den (z.B.  $m_c$ ) Strukturamplituden  $\underline{\bar{c}}$  aufgelöst werden, da  $\underline{F}_1$  nach Hauptachsentransformation (siehe Anhang 4) eine Diagonalmatrix ist.



- b) Für bekanntes  $\underline{c}$  liefert die zweite Zeile von (4-29) unmittelbar die Gradienten an den flexiblen inneren Wänden:

$$\bar{g}_w = q_g - f_3 \underline{V} \underline{c} \quad (4-31)$$

- c) Bei geeigneter Konstruktion der Matrix  $\underline{L}'$  kann schließlich das diskrete Druck- bzw. Potentialfeld  $\underline{p}$  mittels eines SEL aus

$$\underline{L}' \underline{p} = \underline{q} - \underline{W} \bar{g}_w \quad (4-32)$$

errechnet werden.

Dabei ist  $\underline{L}'$  so zu konstruieren, daß es sich in möglichst wenigen Zeilen von  $\underline{L}$  unterscheidet. Wenn es sich in einer Anzahl  $m_p$  Zeilen unterscheidet, dann ist die Gesamtzahl  $m$  der veränderten Gleichung gleich  $m = m_c + m_p$  und diese Zahl bestimmt die Größe der Einflußmatrix  $\underline{C}$ .

Häufig, so z.B. bei der direkten Druckberechnung in REMAC [61], wird  $\underline{L}'$  so definiert, daß es dem Rechteckproblem ohne inneren Einbauten entspricht. Ein Blick auf Abb. 2-3 zeigt, daß  $m_p$  dann zumindest  $2 \cdot NM$  wäre. Für eine feine Diskretisierung wird man aber gerade  $NM$  möglichst groß wählen.

In FLUX wird  $\underline{L}'$  dagegen so konstruiert, daß es der Lösung einer Folge von Teil-Rechteck-Problemen entspricht, bei der  $m_p$  der Anzahl der in Abb. 2-3 mit  $\otimes$  gekennzeichneten Maschen entspricht. Da man radial weniger Maschen benötigt als axial, liefert dies eine Zahl, die kleiner ist als  $2 \cdot NM$ . Die Teilrechtecke sowie die Randbedingungstypen auf jedem Rechteck sind in Abb. 4-4 angegeben. Man kann sich hier vielleicht noch andere Aufteilungen denken, jedoch scheint die gewählte Aufteilung für das vorliegende Problem optimal zu sein.

Die Lösung der diskretisierten Helmholtz-Gleichung (4-32) erhält man dann in folgenden Schritten:



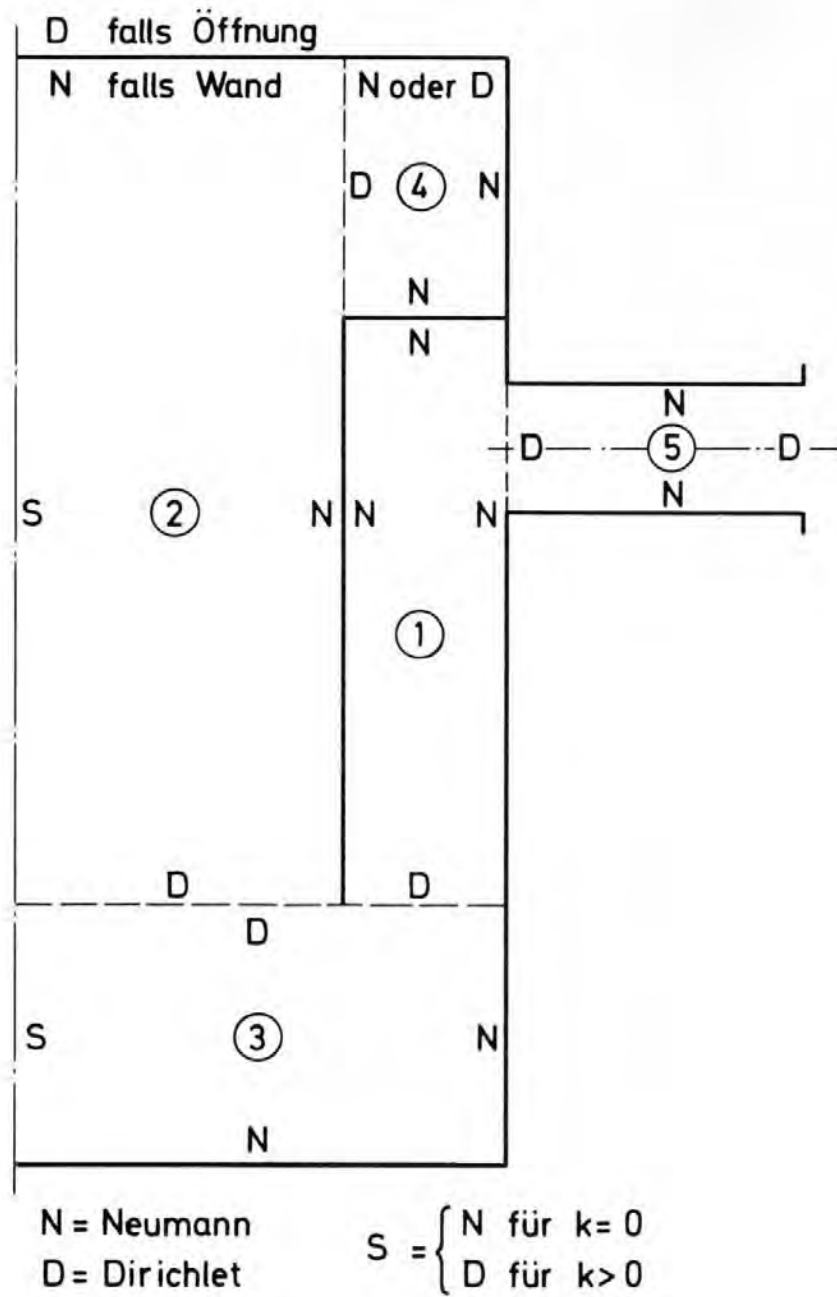


Abb. 4-4: Aufteilung des Fluidgebietes in Teilrechtecke mit den jeweiligen Randbedingungen

- a) Zuerst werden die Teilgleichungen gelöst, die zu den Rechtecken 1 und 2 gehören. Dabei sind lediglich die Gleichungen zu den Maschen zu modifizieren, die auf die noch unbekannten Werte in den Bereichen 3 und 4 Bezug nehmen, bzw. bei denen die Maschen an den Massering stoßen.
- b) Sodann werden die Teilgleichungen für die Rechtecke 3 und 4 gelöst, wobei die Randwerte an den Grenzen zu 1 und 2 aus dem Schritt a) übernommen werden. Zusätzliche Änderungen erfordern hier die Gleichungen für die Maschen, die an den Massering angrenzen, sowie bei durchlöchertem Flansch die Gleichungen für die angrenzenden Maschen in 4 ( $f_{Loch} > 0$ , siehe Abb. 2-3, die mit  $\boxtimes$  gekennzeichneten Maschen), da die ursprünglichen Gleichungen hier nicht die für SEL erforderliche Form haben. Wenn der Flansch dicht ist, dann lohnt es sich nicht, das Teilgebiet 4 überhaupt zu behandeln, da das darin enthaltene Volumen vernachlässigbar klein ist. Die Berücksichtigung dieses Teilgebietes kann daher per Eingabe ausgeschlossen werden.

Dies 2D-B-Problem ist wegen der inneren Dirichlet-Randbedingungen stets nicht-singulär und die EMT daher unmittelbar anwendbar. Das 2D-A-Problem jedoch ist im Falle der Potential-Berechnung für den nullten-Kosinus-Mode (außer bei Dirichlet-Randbedingungen am oberen Deckel) singulär. Da nun - wie im folgenden Abschnitt erläutert - das vorliegende 2D-A-Problem Teil eines 3D-B-Problems wird, stört diese Singularität. Um diese Schwierigkeit zu umgehen, wird das 2D-A-Problem unter den genannten Voraussetzungen selber abgewandelt, indem in einer Masche (gewählt wurde  $i=0, j=NM$ , siehe Abb. 2-3) die diskretisierte Helmholtz-Gleichung durch eine nicht-singuläre Gleichung ersetzt wird. Bei Einhaltung der Konsistenz-Bedingung ist die damit erhaltene Lösung zugleich Lösung des ursprünglichen 2D-A-Problems.

Da die B-Matrix der 2D-Probleme für jeden Kosinus-Mode unterschiedlich ist, ist für jeden Kosinusmode eine eigene Einflußmatrix vorherzuberechnen und zu speichern. Dabei erwies sich

weniger der Zeit- als vielmehr der Speicherbedarf als hinderlich, so daß die abgebrochene EMT gemäß § 4.3.4 eine spürbare Erleichterung brachte.

#### 4.5 Anwendung 2: Lösung des 3D-Problems mittels EMT, Kosinustransformation und Anwendung des 2D-Lösungsverfahrens

Nachdem gemäß § 4.4 ein "schneller Löser" für die 2D-Probleme erstellt ist, kann das "3D-A-Problem", Gl. (2-66), wiederum mittels der EMT behandelt werden. Die direkte Lösung wird hier durch die Matrizen  $\underline{G}_D$  und  $\underline{G}_S$ , also durch die Übergangsbedingungen am Stutzen behindert. Diese Matrizen enthalten aber nur wenige (Größenordnung  $m \lesssim 10$ ) von null verschiedene Zeilen, da nur wenige Maschen (mit  $\Delta$  in Abb. 2-3 gekennzeichnet) des Druckbehälters mit dem Stutzen in unmittelbarem Kontakt stehen. Man hat also nur wenige Zeilen des 3D-A-Problems zu modifizieren, um das 3D-B-Problem mit  $\underline{G}_D$  und  $\underline{G}_S$  gleich null zu erhalten und kann dies in folgenden Schritten lösen:

- a) Man setzt (wegen des trivialen Faktors  $\underline{I}$ )

$$\bar{\underline{g}}_D = \underline{g}_D \cdot \quad (4-33)$$

- b) Nach Kosinus-Transformation von  $\bar{\underline{g}}_D$  sowie der rechten Seiten löst man anstelle des 3D-Druckbehälter-Problems eine Folge von 2D-Problemen mit dem in § 4.4 beschriebenen Verfahren und erhält nach inverser Kosinus-Transformation die gesuchten Lösungen  $(\bar{\underline{p}}, \bar{\underline{g}}_w, \bar{\underline{c}})$ .

- c) Schließlich kann

$$\underline{L}_S \bar{\underline{p}}_S = \underline{g}_S - \underline{D} \bar{\underline{p}} \quad (4-34)$$

schnell mittels Gaußscher Elimination gelöst werden, da  $\underline{L}_S$  eine tridiagonale Matrix ist. (Bei 2D oder 3D Behandlung des Bruch-Rohres könnten hierfür SEL eingesetzt werden.)

Dieses 3D-B-Problem ist in allen seinen Teilen nicht singulär (vergl. § 4.4) und die EMT also anwendbar.

Es sei bemerkt, daß für die Lösung eines 3D-A-Problems jedes 2D-Problem viermal zu lösen ist, so daß es hier auf besonders sorgfältige Programmierung ankommt.

Nach der Lösung des ersten 3D-B-Problems interessieren nur diejenigen Komponenten von  $\underline{P}$  und  $\underline{P}_S$ , die zum Übergangsbereich des Stutzens gehören, da nur hier die Matrix  $\underline{A}$  von  $\underline{B}$  abweicht. Die inverse Kosinus-Transformation kann sich also auf diese Werte beschränken. Bei der Lösung des zweiten 3D-Problems ist die rechte Seite in der Mehrzahl seiner Komponenten die gleiche wie beim ersten, so daß die Kosinus-Transformation hier nur auf die wenigen veränderten Komponenten angewendet werden braucht. Diese Einsparungen entsprechen den Vorschlägen von Temperton [63\_7]. Sie wurden in FLUX realisiert, erbringen aber nur eine geringe (ca. 10 %) Rechenzeitreduktion, da der größte Teil der Rechenzeit nicht in der (sowieso schon schnellen) Kosinus-Transformation, sondern in der Lösung der 2D-Einzelprobleme benötigt wird.

#### 4.6 Rechnungs-Ablauf

Stichwortartig kann der Rechnungs-Ablauf im Programm FLUX2 wie folgt skizziert werden:

##### 1. Vorbereitung

- 1.1 Eingabe verarbeiten
- 1.2 Feldgrößen bestimmen
- 1.3 Felder anlegen
- 1.4 Maschennetz definieren
- 1.5 Strukturdaten ( $\underline{V}, \underline{R}, \underline{A}, \underline{X}, \underline{d}$ ) bereitstellen
- 1.6 Berechnung der Einflußmatrizen:
  - für 2D-Druck-Probleme
  - für 3D-Druck-Problem
  - für 2D-Potential-Probleme
  - für 3D-Potential-Problem

##### 2. Integration

- 2.1 Anfangswerte  $\underline{P}, \underline{P}_S, \underline{C}, \underline{C}_S, \underline{\Phi}$  setzen bzw. einlesen

- 2.2 Aus  $\vec{\phi}$  Geschwindigkeiten und spezifische kinetische Energie  $E$  ermitteln
  - 2.3 Auswertung für Anfangswerte
  - 2.4 Loop bis Endzeit:
    - $t := t + \Delta t$
    - Quelle für Druckfeld und Strukturmoden
    - Lösung der 3D-Helmholtz-Gl. für Druckänderung und der Struktur-Gleichungen für  $\delta \underline{c}$
    - Druck- und Strukturmoden-Zeitintegration
    - Quelle für Potentialfeld
    - Lösung der 3D-Poisson-Gl. für Potential-Änderung
    - Potential-Zeitintegration
    - neue Geschwindigkeiten und kinetische Energie
    - Auswertung für diesen Zeitschritt
  - 2.5 Retten der letzten Ergebnisse
3. Zeichnungs-Ausgabe mit FLUXPLOT.

Die Teile 1., 2. und 3. laufen in getrennten Rechen-Jobs ab. Die Integration (2.) kann in mehreren Stücken über eine "Restart"-Technik ausgeführt werden.

Einzelheiten dieses Ablauf-Schemas zusammen mit einer genauen Programm-Dokumentation werden in einem folgenden Bericht auszuführen sein. Einer genauen Programm-Dokumentation kommt hier besondere Bedeutung zu, da FLUX eventuell relativ leicht für veränderte Randbedingungen nach kleineren Programm-Modifikationen einsetzbar ist.

## 5. SONDERFALL: INKOMPRESSIBLES FLUID - FLUX1

### 5.0 Übersicht

Bei Beginn der hier beschriebenen Arbeiten war lediglich eine für inkompressibles Fluid gültige Programmversion geplant. Für die Zulässigkeit der Inkompressibilitäts-Annahme gab es zwar positive Anzeichen [8\_7], jedoch kann diese erst durch den Vergleich mit den Ergebnissen eines die Kompressibilität erfassenden Modells nachgewiesen werden. Das für inkompressibles Fluid erstellte Programm FLUX1 wurde teilweise bereits andernorts beschrieben [5, 93\_7]. Es basiert auf den im vorherigen Abschnitt beschriebenen Verfahren zur Lösung elliptischer Gleichungen, wobei hier vorwiegend Laplace-Gleichungen auftreten. Ein wesentlicher Teil von FLUX1 dient der Berechnung von Eigenschwingungen des Kernmantels mit und ohne Berücksichtigung der virtuellen Fluid-Masse.

In diesem Kapitel werden die Grundzüge von FLUX1 kurz rekapituliert. Darüber hinaus werden die Erfassung von Dämpfungseffekten erläutert und Näherungsformeln für Eigenschwingungsdaten und Dämpfungsparameter für bestimmte Schwingungsformen angegeben. Numerische Ergebnisse von FLUX1-Rechnungen werden in § 6 zusammen mit denen von FLUX2 präsentiert.

### 5.1 Das FLUX1-Modell

Die Annahme einer inkompressiblen Potential-Strömung erlaubt entscheidende Vereinfachungen:

- Bei starrer Struktur und zeitinvarianten Randbedingungen kann das Druckfeld zu allen Orten und Zeiten durch eine Potential-Lösung ausgedrückt werden [8, 93\_7]. Es ist hier also nur eine 3D-Laplace-Gleichung zu lösen. Die zeitliche Variation wird von der charakteristischen Beschleunigungszeit  $\tau$  kontrolliert, die aus dem Potentialfeld berechenbar ist [8\_7]. Abb. 5-1 zeigt die prinzipielle Variation der Fluid-Geschwindigkeit  $v$  und des Druckes  $p$  an einem

beliebigen Ort. Die erste Größe variiert wie  $\tanh[t/(2\tau)]$  die zweite wie  $\tanh^2[t/(2\tau)]$ .

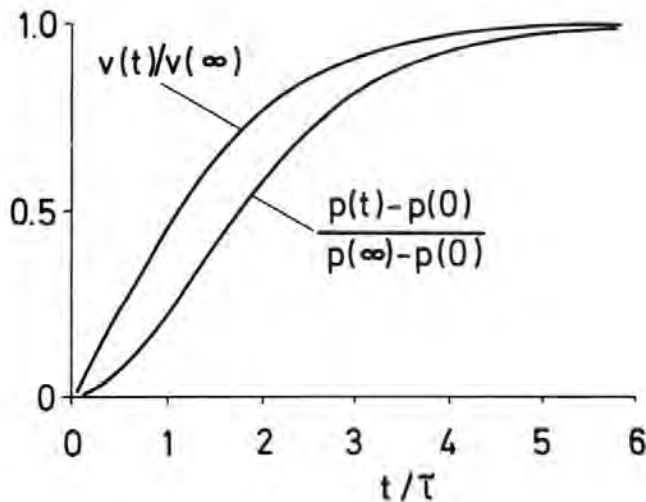


Abb. 5-1 Geschwindigkeit und Druck in der Beschleunigungsphase

- Das Strömungsfeld hat keine inneren Freiheitsgrade. Vielmehr ist es vollständig durch die Randbedingungen spezifiziert. So kann das Druckfeld als Funktion der Strukturbeschleunigungen ausgedrückt werden. Dies führt auf das Konzept der virtuellen Fluid-Masse, vergl. § 3.3.1.
- Eigenschwingungen sind nur linear definierbar. Hier werden kleine Geschwindigkeiten vorausgesetzt, so daß die kinetische Energie  $E$  im Fluid klein ist gegenüber Druckdifferenzen. In diesem Fall kann die Strömung im Blowdown-Stutzen ebenfalls vernachlässigt werden, wodurch die Kosinus-Transformation (siehe § 2.5.2) einen Satz separater 2D-Probleme liefert. Zusammen mit dem vorhergenannten Punkt führt dies zu stark verkleinerten Eigenwertproblemen im Gegensatz zu dem 3D kompressiblen Fall, wo das Eigenwertproblem so viele Freiheitsgrade wie Fluid-Maschen und Strukturfreiheitsgrade umfassen würde.

Zusätzlich zur Annahme der Inkompressibilität, die in FLUX2 als Sonderfall ( $1/a = 0$ ) auch enthalten ist, werden obige Eigenschaften zur Konstruktion eines besonders effektiv rechnenden



Verfahrens ausgenutzt und in FLUX1 realisiert. Hierzu wird anstelle der vollständigen simultanen Integration der Fluid- und Strukturgleichungen (wie in FLUX2) folgendes dreiteiliges Verfahren benutzt (vergl. Abb. 5-2):

Das "FLUX1-Modell":

- 1) Das transiente 3D-Druckfeld wird bei starrer Struktur berechnet, wobei die zeitliche Variation analytisch erfaßt wird. Dies liefert die am Kernmantel angreifende Druckdifferenz  $\Delta p(t)$ .
- 2) Für kleine Geschwindigkeiten und geschlossenen Druckbehälter wird - getrennt nach Kosinus-Modes - die virtuelle Fluid-Massen-Matrix berechnet und damit das Eigenschwingungsproblem gelöst. Ergebnis sind neben den virtuellen Massen die Eigenfrequenzen und Eigenschwingungsformen des gekoppelten Struktur-Fluid-Systems. Näherungsweise kann eine virtuelle Dämpfungsmatrix berechnet werden, siehe § 5.2.

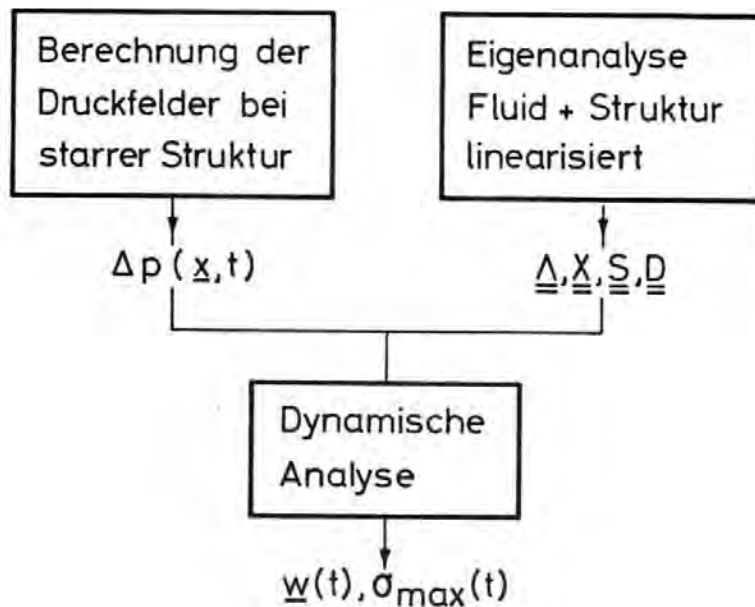


Abb. 5-2 Ablauf-Schema von FLUX1



- 3) Die dynamische Reaktion des Kernmantels auf die gemäß 1) (oder durch andere Verfahren) bestimmte Drucklast wird durch Integration der Struktur-Gleichungen für diese Last unter Einschluß der virtuellen Massen berechnet. Nach einer Hauptachsentransformation (Anhang 4) entsprechend den unter 2) bestimmten Eigenlösungen verlangt dies lediglich die Integration eines Satzes entkoppelter gewöhnlicher Differentialgleichungen. In Sonderfällen, wie bei Sprunglasten (entsprechend einem im HDR-Experiment geplanten "Zupf-Versuch" [7\_7]) oder bei periodischer Anregung, kann diese Integration analytisch ausgeführt werden.

Die wesentlichen Einzelheiten des theoretischen Modells sind in [93\_7] dokumentiert. Bezüglich einer Diskussion der Gültigkeit und Auswirkungen der verwendeten Vereinfachungen siehe Anhang 8. Im folgenden wird lediglich die bisher nicht beschriebene Methode zur Berechnung der virtuellen Dämpfungsmatrix dargestellt. Einzelheiten der Behandlung der gemäß 3) analytisch behandelbaren Sonderfälle sollen an anderer Stelle berichtet werden.

## 5.2 Virtuelle Dämpfungs-Matrix

Im Rahmen eines Potentialströmungsansatzes ist bei inkompressiblem Fluid die Reibung an Wänden und im Fluid eigentlich null. Um dennoch eine ungefähre Abschätzung für die effektive Dämpfung durch Wandreibung zu erhalten, wird aus dem Potentialströmungsfeld eine Wandschubspannung  $\tau_w$  aufgrund eines hydraulischen Modells berechnet:

Das Potentialströmungsfeld liefert Tangentialgeschwindigkeiten  $u_t \neq 0$  an Wänden. Wenn man  $u_t$  näherungsweise als die über den jeweiligen Strömungsquerschnitt mit einer charakteristischen Kanalbreite  $H$  (z.B. Ringraum-Spaltbreite  $H$ ) interpretiert, dann liefern hydraulische Formeln den Ansatz

$$\tau_w = - f u_t. \quad (5-1)$$

Der Koeffizient  $f$  ist bei turbulenter Strömung eine nichtlineare Funktion der Geschwindigkeit. Hier werden jedoch nur lineare

Reibgesetze berücksichtigt, um zu einer Geschwindigkeits-invarianten Dämpfungsmatrix zu gelangen. Ein solches Reibgesetz erhält man unmittelbar, wenn man laminare Strömung mit ausgebildetem Parabelprofil annimmt. In diesem Fall ist für ebene Kanäle

$$f = 6\eta / H, \quad (5-2)$$

wobei  $\eta$  die dynamische Viskosität des Fluids ist. Statt des molekular bedingten Stoffwertes  $\eta$  kann aber auch ein aufgrund empirischer Gesetze vergrößerter (effektiver) Viskositätswert eingesetzt werden, um Turbulenz und andere (z.B. Beschleunigungs-) Effekte näherungsweise zu berücksichtigen.

Durch die Bewegung des Fluids mit der Tangentialgeschwindigkeit  $\underline{u}_t$  gegen diese Wandschubspannung wird an jedem Wandort lokal je Flächeneinheit und Zeiteinheit die Energie  $-\underline{u}_t \cdot \underline{\tau}_w$  dissipiert. Die im ganzen System durch Wandreibung auftretende halbe Rate des Energieverlustes (Dissipation, § 2.3.1) ist also

$$\mathcal{D} = -\frac{1}{2} \oint \underline{u}_t \cdot \underline{\tau}_w dO, \quad (5-3)$$

wobei das Integral über alle "benetzten" Wände zu nehmen ist.

Das Integral kann durch eine Summe über die Randmaschen approximiert werden. In jeder Randmasche ist  $\underline{u}_t$  etwa konstant und eine lineare Funktion des Strömungspotentials und diese eine lineare Funktion der modalen Struktur-Geschwindigkeiten  $\dot{\underline{c}}$ . Es existiert also ein Zusammenhang

$$\mathcal{D} = -\frac{1}{2} \sum_i \left( \sum_j \underline{u}_{i,j} \dot{c}_j \right) \left( -f_i \sum_k \underline{u}_{i,k} \dot{c}_k \right) \sigma_i, \quad (5-4)$$

wobei  $\sigma_i$  die Wandfläche der i-ten Randmasche,  $f_i$  der effektive Reibkoeffizient gemäß (5-2) in der i-ten Randmasche und  $\underline{u}_{i,j}$  die durch eine Einheitgeschwindigkeit des j-ten Strukturmodos in der i-ten Randmasche induzierte Tangentialgeschwindigkeit ist.

Die Koeffizienten  $\underline{U}_{i,j}$  können durch Lösung der Potentialgleichung für eine Einheitsgeschwindigkeit im j-ten Mode numerisch errechnet werden.

Ein Vergleich mit (2-9) zeigt, daß die Elemente  $D_{j,k}$  der resultierenden "virtuellen" Dämpfungsmatrix durch

$$D_{j,k} = \sum_i -f_i \underline{U}_{i,j} \cdot \underline{U}_{i,k} \sigma_i \quad (5-5)$$

gegeben sind.

Diese Matrix ist wie erforderlich positiv semi-definit für  $f_i \geq 0$  und  $\sigma_i > 0$ , denn für beliebiges reelles  $x_j$  ist der quadratische Ausdruck

$$x_j^T D_{j,k} x_k = \sum_i f_i \sigma_i \left( \sum_j \underline{U}_{i,j} x_j \right)^2 \geq 0 \quad (5-6)$$

nicht negativ.

Voraussetzung für die gewählte Vorgehensweise ist die Existenz des Integrals (5-3). Problematisch sind konvexe Kanten, an denen die Tangentialgeschwindigkeit unendlich groß ist. An einer Kante gemäß Abb. 5-3 mit Winkel  $\theta$  hat die Tangentialgeschwindigkeit  $u_t$  eine Singularität der Form [97, S. 60]

$$u_t = a x^{n-1}, \quad n = \pi/\theta \geq 1/2.$$

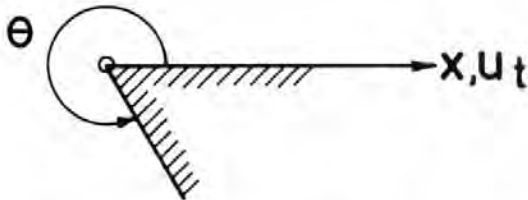


Abb. 5-3 Zur Erläuterung der Singularität an Kanten

Das Randintegral

$$\int f u_t^2 dx = \frac{f a^2}{2n-1} x^{2n-1} \quad (5-7)$$

ist aber selbst für  $\theta=2\pi$ ,  $n=1/2$  in der Nähe von Kanten endlich.

Zahlenrechnungen (siehe § 6.2.2 und Tabelle 8) für die in Frage kommenden Reaktor-Fälle zeigen, daß die Dämpfung bei laminarer Strömung mit Parabelprofil vernachlässigbar klein ist und auch bei etwa um den Faktor tausend vergrößerten effektiven Zähigkeiten pro Schwingung eine Amplitudenreduktion unter 1% bewirkt. Insofern ist die stark vergrößerte Behandlung der Dämpfung gerechtfertigt. Für die Hauptachsentransformation werden wie üblich ([19], siehe § A4.2) die Elemente  $D_{ij}$  für  $i \neq j$  vernachlässigt.

### 5.3 Analytische Näherungsformeln für virtuelle Massen, Eigenfrequenzen und Dämpfungskoeffizienten

Zwecks Überprüfung zumindest der Größenordnung der numerischen Ergebnisse und zum Verständnis des Einflusses wesentlicher Parameter sind Näherungsformeln sehr wichtig. Im folgenden werden solche Formeln angegeben, bei denen vereinfachte Verformungsansätze für die Struktur und eindimensional approximierten Strömungsfelder zugrunde gelegt sind. Maßgebend für die Vereinfachungen ist die Übersichtlichkeit der resultierenden Formeln. Die betrachteten Verformungen sind gemäß Abb. 5-4

- a) der "Atmungs-Mode" (auch "Kesselformel-Mode" genannt) und
- b) der "Balken-Biege-Mode".

Diese Schwingungsformen waren zu Testzwecken auch in [19] betrachtet worden. In beiden Fällen hat die Struktur nur einen Freiheitsgrad  $c$ . Die strukturmechanischen Eigenschaften dieser Schwingungsformen kann man Standardwerken entnehmen. Die fluid-dynamischen Aspekte sind im Detail in Anhang 6 diskutiert. Die Verformungsansätze  $w(\epsilon)$  für die Normalverformung  $w$ , die Strukturmassen  $M$ , Steifigkeiten  $S$  und die resultierenden

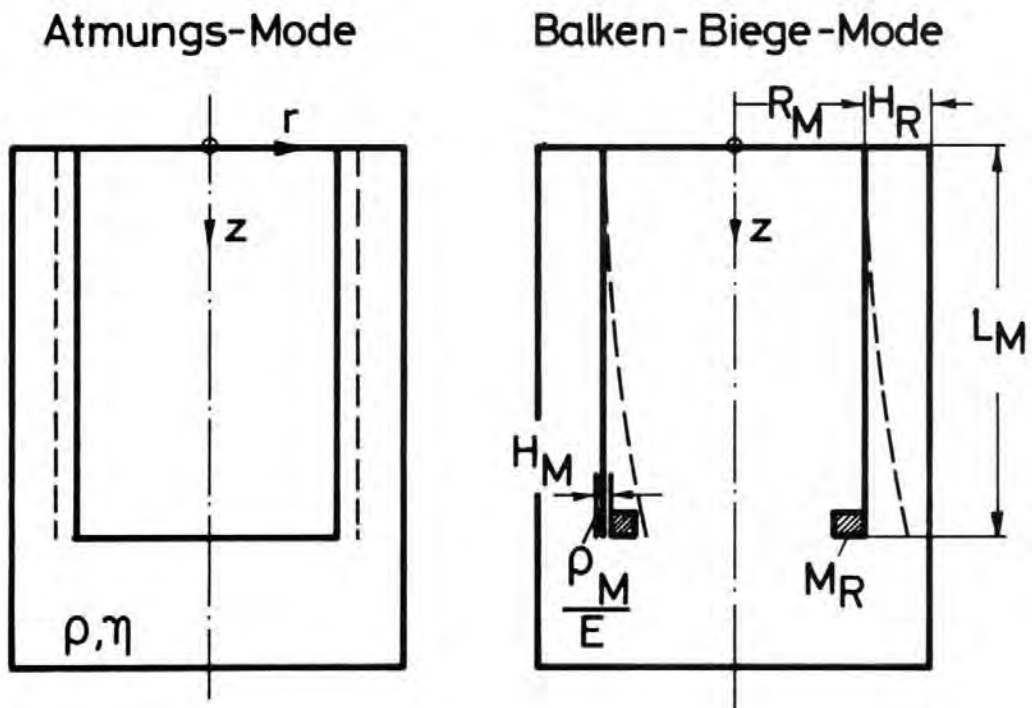


Abb. 5-4: Ersatzgeometrie und Verformung für Näherungsformeln.

virtuellen Fluid-Massen  $M$  und Dämpfungs-Koeffizienten  $D$  sowie die (ungedämpften) Eigenkreisfrequenzen  $\omega_0$  im Vakuum und  $\omega$  im Fluid sind (sonstige Symbole siehe Abb. 5-4 und Tabelle 1):

a) für Atmungs-Mode:

$$\omega = \epsilon \quad (5-8)$$

$$M = (2 \pi R_M L_M) S_M H_M \quad (5-9)$$

$$S = (2 \pi R_M L_M) E H_M / R_M^2 \quad (5-10)$$

$$F = (2 \pi R_M L_M) \frac{1}{3} S_0 L_M^2 / H_R \quad (5-11)$$

$$D = (2 \pi R_M L_M) 4 \eta L_M^2 / H_R^3 \quad (5-12)$$

$$\omega_0^2 = E / (S_M R_M^2) \quad (5-13)$$

$$\omega^2 = \omega_0^2 / \left( 1 + \frac{1}{3} \frac{S_0}{S_M} \frac{L_M^2}{H_M H_R} \right) \quad (5-14)$$

b) für Balken-Biege-Mode:

$$\omega = \epsilon (z / L_M)^2 \quad (5-15)$$

$$M = \frac{2}{5} \pi S_M R_M L_M H_M + M_R \quad (5-16)$$

$$S = 4 \pi E H_M (R_M / L_M)^3 \quad (5-17)$$

$$F = \frac{1}{5} \pi S_0 R_M^2 L_M + \frac{1}{5} \pi S_0 R_M^2 L_M (R_M / H_R) \quad (5-18)$$

$$D = \frac{12}{5} \pi \eta L_M (R_M / H_R)^3 \quad (5-19)$$

$$\omega_0^2 = \frac{10 E R_M^2}{L_M^4 S_M [1 + 3 M_R / (2 \pi R_M L_M H_M S_M)]} \quad (5-20)$$

$$\omega^2 = S / (M + F) \quad (5-21)$$

(Hierbei erfaßt der erste Summand von  $F$  die virtuelle Masse des Fluids im Innenraum und der zweite den Anteil des Ringraums.)

Man erkennt in beiden Fällen den großen Einfluß der Ringraumbreite  $H_R$  auf  $F$  und  $D$ . Eine numerische Auswertung dieser Formeln ist in § 6.2.2 angeführt.

## 6. NUMERISCHE ERGEBNISSE UND DISKUSSION

### 6.0 Übersicht

Die Programme FLUX1 und FLUX2 werden auf die Bedingungen des geplanten HDR-Experiments, eines DWR-Blowdowns und des RS16-Experiments angewandt. Zweck dieser Rechnungen ist

- a) Nachweis der inneren Konsistenz des Modells und des numerischen Verfahrens.
- b) Studium der wesentlichen physikalischen Effekte.
- c) Verifikation der Modelle durch Nachrechnung der RS16-Experimente.
- d) Quantitative Vorherberechnung der zu erwartenden Kernmantel-Beanspruchungen im Falle des HDR und eines DWR.

Der Schwerpunkt liegt auf den Punkten a) bis c). Die Mehrzahl der Rechnungen erfolgt dämpfungsfrei; die Auswahl geeigneter Dämpfungsparameter stellt die größte Unsicherheit der Rechnungen dar. Obwohl eine Dimensionsanalyse durchgeführt wurde (Anhang 7), werden die Ergebnisse mit Rücksicht auf das praktische Interesse an den Zahlenwerten dimensionsbehaftet dargestellt.

### 6.1 Die betrachteten Fälle

#### 6.1.1 Fall-Spezifikation

Die betrachteten Geometrien und Randbedingungen sind unter Bezug auf Abb. 6-1 in Tabelle 1 spezifiziert. Betrachtet werden die Probleme

- "HDR",    entsprechend Blowdown-Versuch 3     $\angle 94_7$   
"DWR",    entsprechend BIBLIS-B     $\angle 95_7$   
"RS16",    entsprechend dem DWR5-Versuch     $\angle 2_7$ .

Diese Probleme werden mit drei verschiedenen Maschennetzen (vergl. Abb. 2-3) und Strukturdiskretisierungen, "N1", "N2" und



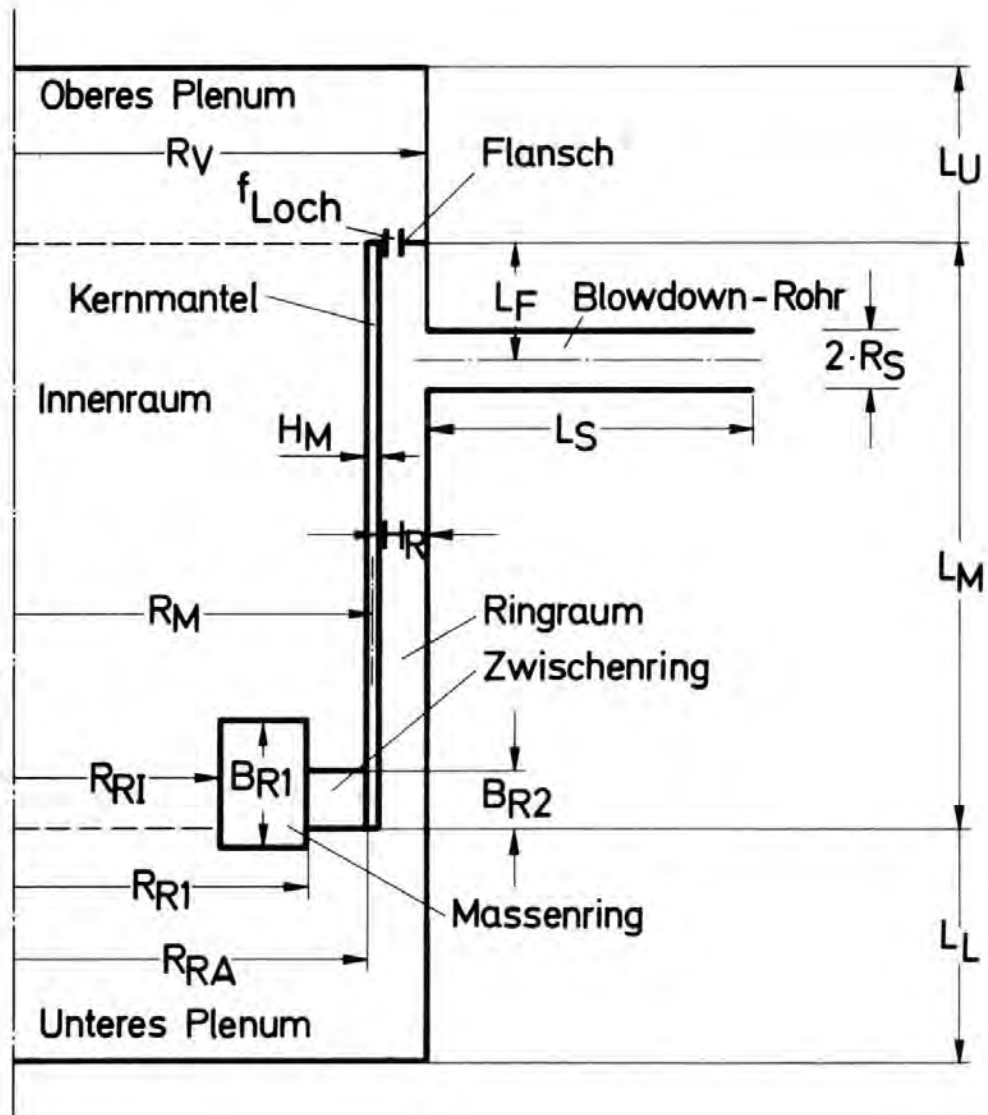


Abb. 6-1: Geometrie-Parameter im FLUX-Modell. (Die Unterteilung des Rings in zwei Teile erfolgt nur in Bezug auf die Berechnung der Rotationsträgheit im Strukturmodell. Im fluiddynamischen Teil wird  $R_{RI} = R_{RA} = R_M$  gesetzt.)



"N3" gemäß Tabelle 2 numerisch erfaßt, wobei die Zahl der Freiheitsgrade sich etwa verhalten wie

$$N1 : N2 : N3 = 1 : 6 : 24$$

Darüber hinaus werden eine Vielzahl von Fällen gemäß Tabelle 3 unterschieden, bei denen verschiedene Modellparameter variieren.

#### 6.1.2 Struktur- und Geometrie-Modellierung für DWR und RS16

Besonderer Diskussion bedarf die Behandlung der Einbauten in den DWR- und RS16-Fällen.

In FLUX können das Reaktor-Core sowie Siebplatten und andere innere Einbauten bisher nicht beschrieben werden. Dies hat keine prinzipiellen, sondern programmtechnische Gründe. In der vorliegenden Version sind die FLUX-Programme zunächst zur Erfassung der HDR-Gegebenheiten konzipiert. Eine Erweiterung ist möglich.

Das Reaktor-Core im DWR (bzw. die Core-Attrappe im RS16-Experiment) wird lediglich bezüglich seiner ungefähren Masse durch den Masse-Ring am unteren Kernmantel-Ende erfaßt.

Darüber hinaus kann das verwendete CYLDY2-Modell für den Kernmantel Wandstärkenvariationen und drehelastische Einspannbedingungen nicht berücksichtigen. Dies betrifft insbesondere den RS16-Kernmantel, der aus mehreren Schüssen mit relativ geringer Wandstärke (8 mm) im oberen Drittel und deutlich größerer Wandstärke (18 mm) in den beiden unteren Dritteln zusammengesetzt ist und bei dem die Nachgiebigkeit der Einspannung bezüglich des Balken-Biege-Modus von gleicher Größenordnung wie die Weichheit der Schale selbst ist. Allerdings werden wir sehen, daß der Balken-Biege-Mode für die Dynamik des gekoppelten Fluid-Struktur-Systems von untergeordneter Bedeutung im Vergleich zu den Schalen-Modus im oberen Drittel ist. Der Kernmantel des RS16-Experiments wird daher als starr eingespannt betrachtet. Zudem wird mit dem CYLDY2-Modell nur die Schalen-Dynamik des

oberen Drittels erfaßt und die Masse sowie Rotationsträgheit der beiden unteren Drittel wie die des Masseringes am HDR behandelt. Der DWR-Kernmantel wird ebenfalls als starr eingespannt behandelt.

Eine weitere Unzulänglichkeit des CYLDY2-Modells wurde bei der Nachrechnung der RS16-Experimente festgestellt (siehe § 6.4.3): Die in CYLDY2 verwirklichten Randbedingungen schließen eine mittlere axiale Bewegung des Masseringes aus. D.h. die Schale wird im nullten Mode so behandelt, als wäre sie am unteren Ende fest eingespannt [10]. Durch die radiale Ausdehnung der Schale und die Querdehnung werden deshalb axiale Spannungen in der Schale induziert, die zu einer wesentlichen Behinderung der radialen Verformungen führen. Um diesen Effekt wenigstens näherungsweise auszuschalten, wird mit einem hypothetischen Wert  $\nu=0$  (und für Vergleichszwecke mit  $\nu=0,1$ ) für die Querkontraktionszahl anstelle des realistischeren Wertes 0,3 gerechnet.

Eine genauere Beschreibung erfordert ein verbessertes Strukturmodell. Gemäß § 1.2.1.2 war es nicht Zweck dieser Arbeit, dieses Teilproblem optimal zu lösen. Sollten neue Strukturmodelle bereitstehen, die den Voraussetzungen A4 und A5 gemäß § 2.1 genügen, dann können diese ohne weiteres in FLUX integriert werden.

#### 6.1.3 Zur Festlegung der hydrodynamischen Randbedingungen

In FLUX ist der Druck  $p_1$  an der Bruchöffnung vorzugeben. Dieser Druck kann aufgrund anderer Rechenmodelle, die die Zweiphasigkeit erfassen, oder aufgrund von Messungen für Nachrechnungen vorgegeben werden. Nach Pana [96] besteht eine brauchbare Näherung darin,  $p_1$  gleich dem Sättigungsdruck entsprechend dem Ausgangszustand des Fluids im Stutzen zu setzen. Diese Aussage wird von den Untersuchungen mit einem Zweiphasenmodell DRIX von Möisinger [98] etwa bestätigt. Zwecks Erfassung einer endlichen Bruchöffnungszeit  $\Delta t_{Bruch}$  wird in FLUX2 eine Rampenfunktion vorgegeben. In FLUX1 wird  $\Delta t_{Bruch}=0$  angesetzt, so

daß der Randdruck  $p_1$  für  $t > 0$  zeitinvariant ist. Dies ist Voraussetzung für die analytische Darstellung der zeitlichen Variation des Druckfeldes in dem inkompressiblen Modell. Die Ausströmgeschwindigkeit stellt sich in jedem Fall frei ein. In FLUX1 ist zusätzlich der Druck  $p_0$  am oberen Druckbehälterdeckel vorzugeben. Es wird  $p_0$  gleich dem Anfangsdruck gesetzt.

## 6.2 FLUX1: Ergebnisse für inkompressibles Fluid

### 6.2.1 Druckbelastung

Bei starrer Struktur liefert FLUX1 die in Abb. 6-2 dargestellten Potentialfelder, die dem Druckfeld unmittelbar nach dem Bruch proportional sind. Diese Abbildung liefert einen guten Eindruck von den drei betrachteten Geometrien und dem grundsätzlichen Strömungsfeld. Die Dichte der Höhenlinien ist dem Betrag der Geschwindigkeit proportional. Deutlich werden die vergleichsweise großen Geschwindigkeiten in Stützennähe.

Charakterisierende Größen hierzu sind:

$\tau$  die Beschleunigungszeit [8, 93], vergl. Abb. 5-1

$\Delta p_{max}$  die maximale Druckdifferenz am Kernmantel

$\Delta p_{u,max}$  die maximale Druckdifferenz am Umfang der Kernmantelaußenseite zwischen den Positionen  $\varphi = 180^\circ$  und  $\varphi = 0^\circ$

$F$  die am Kernmantel wirkende Querkraft

$$F = - \int_0^{L_M} \int_0^{2\pi} \Delta p(z, \varphi) \cos \varphi \, dz \, R_M \, d\varphi$$

$M$  das am Kernmantel bezüglich der Kernmanteleinspannung wirkende Biegemoment

$$M = - \int_0^{L_M} \int_0^{2\pi} \Delta p(z, \varphi) z \cos \varphi \, dz \, R_M \, d\varphi$$

$v_{max}$  die maximale Ausströmgeschwindigkeit am Stutzen

$$v_{max} = \sqrt{2(p_0 - p_1)/\rho_0}$$

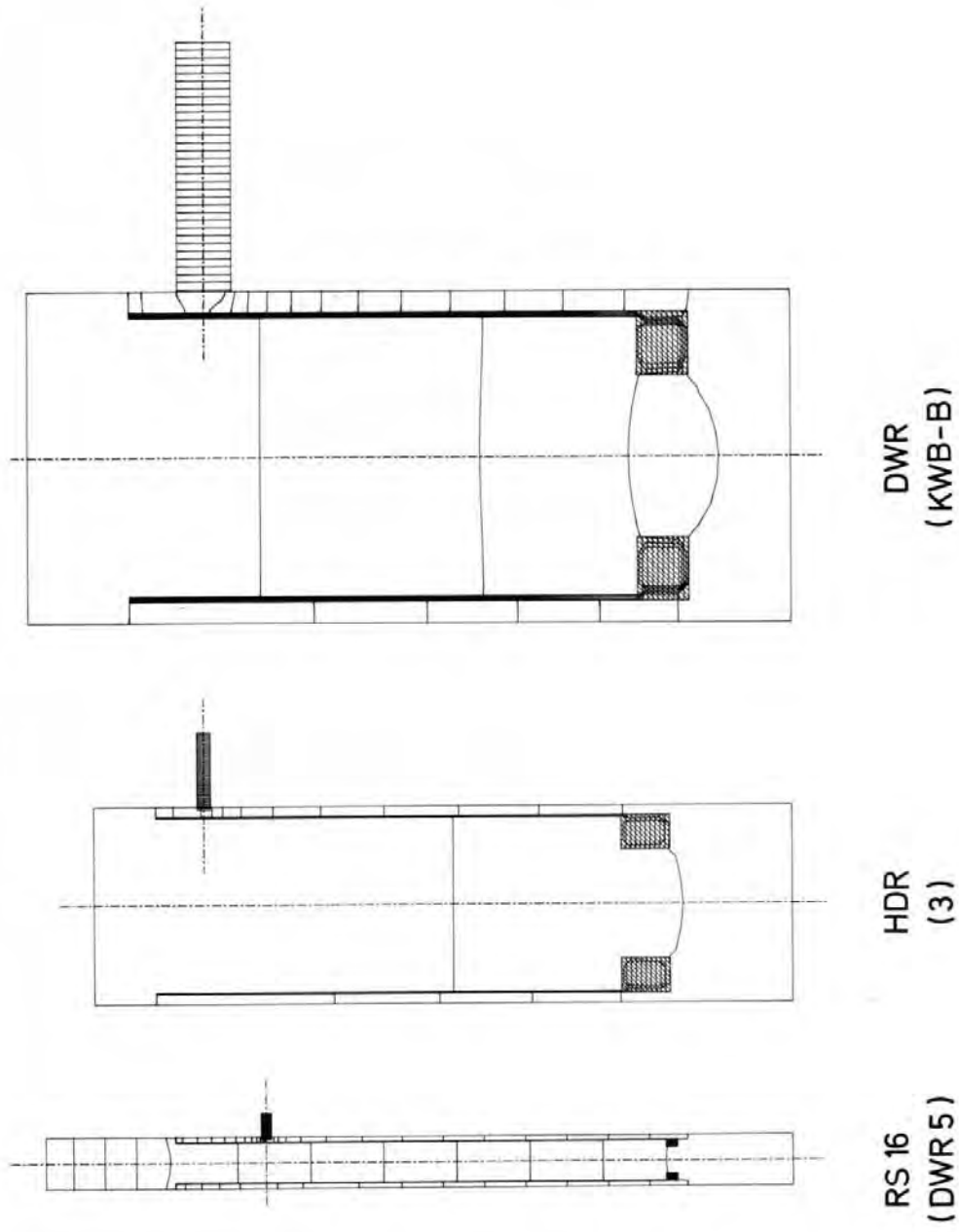


Abb. 6-2: Potentialfeld bei inkompressiblem Fluid für die drei betrachteten Geometrien

Die diesbezüglichen Rechenergebnisse zeigt Tabelle 4. Ähnliche Ergebnisse wurden in [8] mit stückweisen ein- und zweidimensionalen Modellen gewonnen. Diese Näherungsergebnisse werden von den hier gewonnenen Werten bestätigt.

Die Lösung der Potentialgleichung ist relativ empfindlich gegen Rundungsfehler, da das Gleichungssystem (im Gegensatz zum Helmholtz-Problem) nur schwach diagonal dominant ist. In Tabelle 5 sind die Rechenzeiten und Residuum-Rundungsfehler aufgeführt. Da die Rechnungen mit doppelter Maschinengenauigkeit (ca.  $10^{-15}$ ) durchgeführt werden, sind die Rundungsfehler gegenüber den mit einfacher Genauigkeit (ca.  $10^{-6}$ ) gewonnenen früheren Ergebnissen [66] deutlich kleiner. Im wesentlichen werden die Rundungsfehler durch den Parameter  $\varepsilon$  (gemäß Tabelle 5) der abgebrochenen zyklischen Reduktion (§ 4.2.2) und der abgebrochenen EMT (§ 4.3.4) bestimmt. Ein weiteres Genauigkeitsmaß ergibt sich aus der Massenerhaltung

$$\varepsilon_{\text{mass}} \equiv |\dot{m}_{\text{out}} - \dot{m}_{\text{in}}| / |\dot{m}_{\text{out}}|,$$

wobei  $\dot{m}_{\text{out}}$  und  $\dot{m}_{\text{in}}$  die an der Bruchstelle bzw. am oberen Deckel aus- bzw. einströmenden Massen sind. Anhand Tabelle 5 sehen wir, daß das verwendete Diskretisierungs- und Lösungsverfahren den integralen Massenerhaltungssatz  $\dot{m}_{\text{out}} = \dot{m}_{\text{in}}$  sehr gut wiedergibt.

#### 6.2.2 Eigenanalyse

Die mit FLUX1 gewonnenen Eigenschwingungsformen bilden einerseits die Grundlage der dynamischen Analyse für inkompressibles Fluid und sind andererseits unmittelbar anschaulich interpretierbar [99].

Tabelle 7 enthält die zehn ersten Eigenfrequenzen der verschiedenen Strukturen in Wasser und in Vakuum. Die Ergebnisse basieren auf der Diskretisierung N2. Die Parameter  $m$  und  $n$  bezeichnen die Ordnung der axialen und azimutalen Schwingungsform.

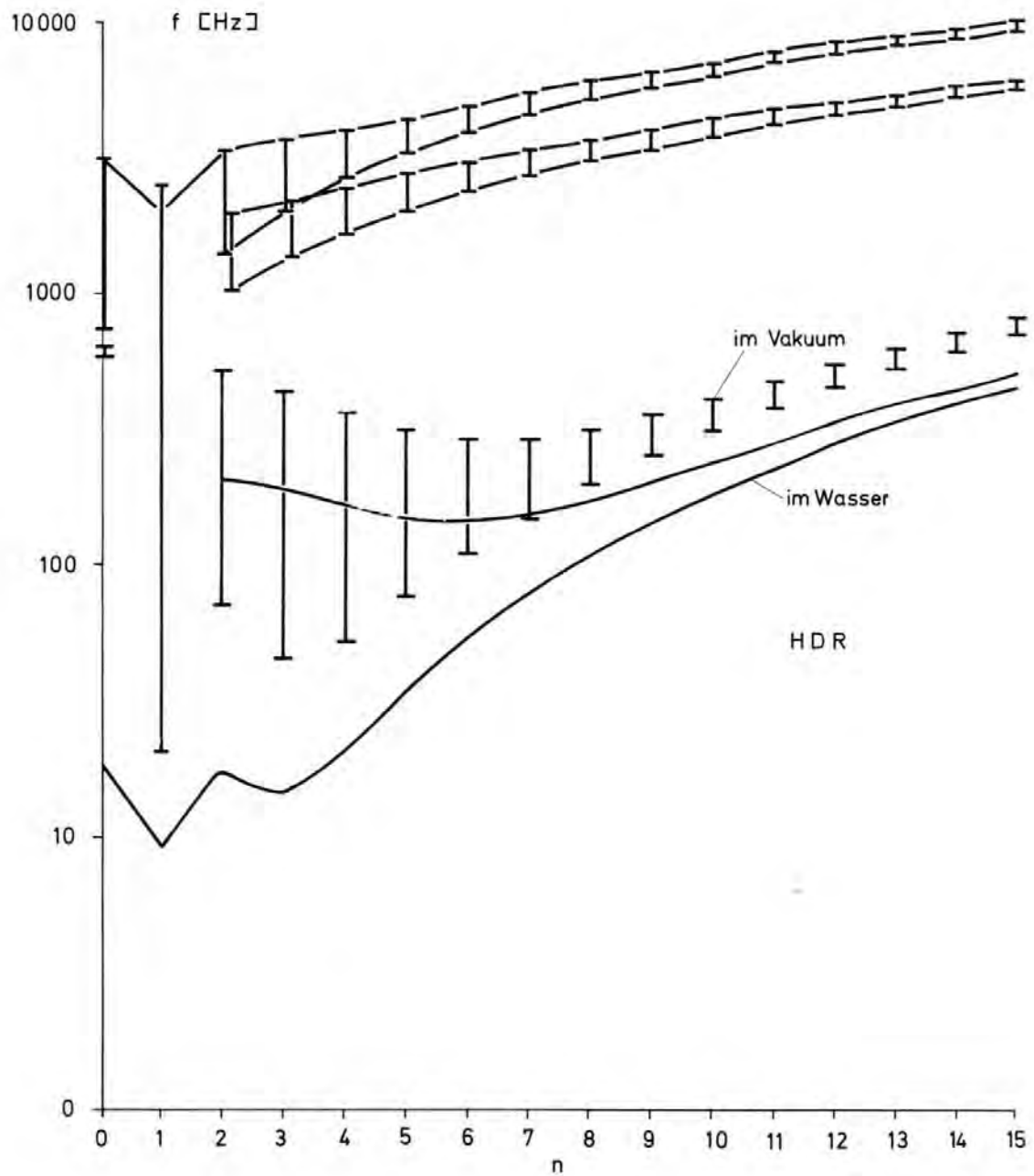


Abb. 6-3: Eigenfrequenzen des HDR-Kernmantels in Vakuum und Wasser. Innerhalb der Bänder liegen 16 Eigenfrequenzen (Netz N3).

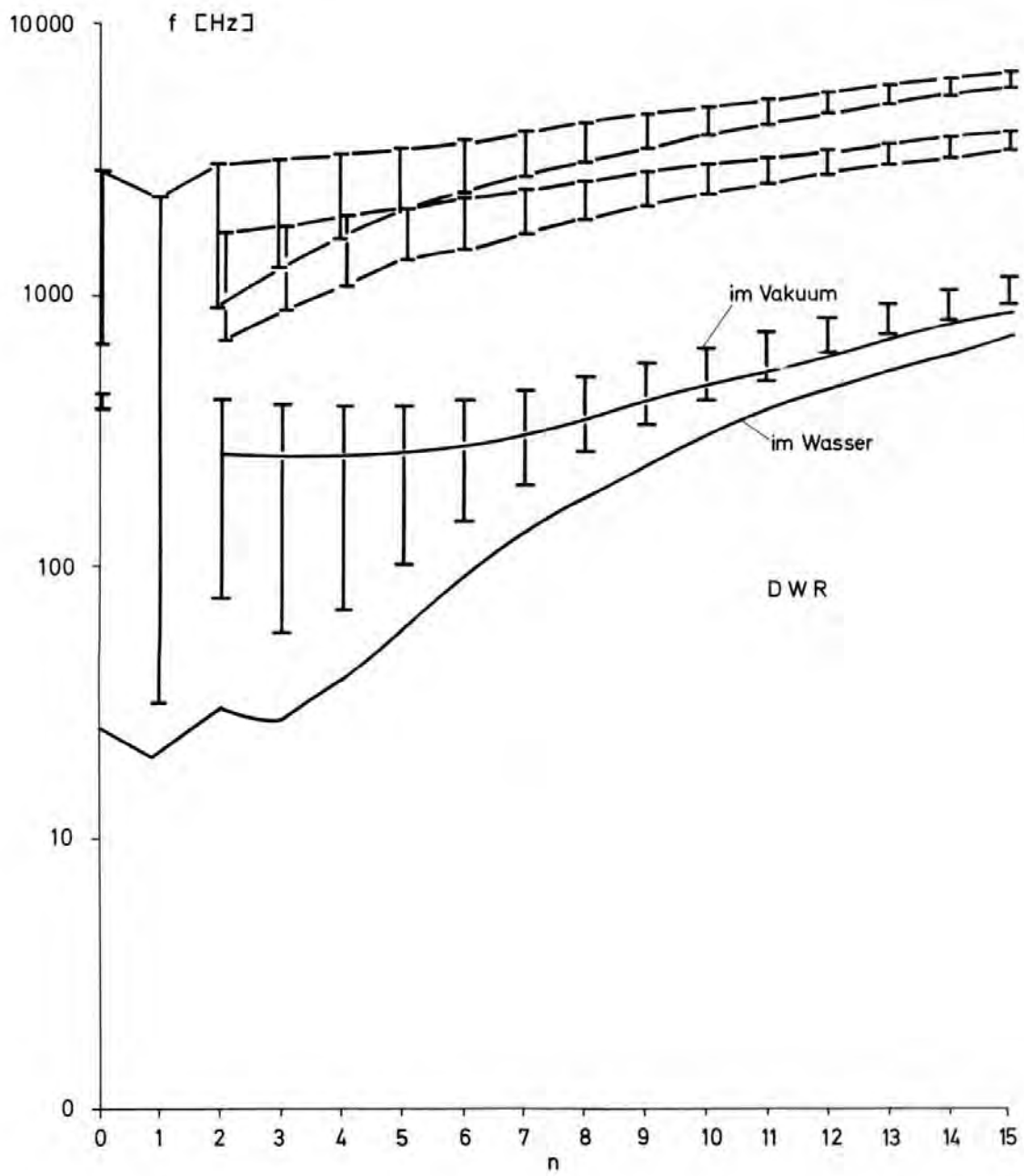


Abb. 6-4: Eigenfrequenzen eines DWR-Kernmantels in Vakuum und Wasser (Netz N3)



Die axiale Ordnung  $m$  wird dabei aufgrund derjenigen axialen Formfunktion des CYLDY2-Modells, die den größten Beitrag zur Eigenschwingungsform liefert, bestimmt.

Abb. 6-3 und 6-4 zeigen die Variation der Eigenfrequenzen als Funktion der Umfangsordnung  $n$  für HDR und DWR jeweils für die Struktur in Vakuum und Wasser. Man erkennt zunächst das typische CYLDY2 [10]-Ergebnis, wonach die radialen, axialen und azimuthalen Schwingungsformen (von unten nach oben in dieser Reihenfolge) der verschiedenen axialen Ordnungen jeweils ein Band bilden, das mit steigender Umfangsordnung immer enger wird. (Für  $n = 1$  gibt es in CYLDY2 nur radiale und für  $n = 0$  nur radiale und axiale Schwingungsformen.)<sup>+</sup> Die virtuelle Fluidmasse beeinflusst nahezu allein die radialen Schwingungen. Man erkennt zudem das für Schalen typische Ergebnis, daß sehr viele dicht benachbarte Eigenfrequenzen vorliegen. Der Einfluß der virtuellen Fluidmasse wird mit zunehmender Umfangsordnung kleiner. Er ist besonders groß bei den niedrigsten Balkenmodes ( $n = 1$ ) und Atmungsmodes ( $n = 0$ ). Die Ursache hierfür ist geometrischer Art und wird anhand der in Abb. 6-5 bis 6-8 dargestellten Eigenschwingungsformen zu den vier niedrigsten Eigenfrequenzen verständlich. Bei  $n = 0$ ,  $m = 1$  muß das Wasser im Ringraum auf einem besonders langen und engen Weg axial durch den Ringraum in den Innenraum verdrängt werden. Bei  $n = 1$ ,  $m = 1$  muß das Wasser immerhin noch von einer Seite des Ringraumes auf die gegenüberliegende Seite strömen. Dabei werden die notwendigen Fluidgeschwindigkeiten um so größer je enger der Ringraum ist. Dies erklärt, warum der Einfluß der virtuellen Masse beim HDR stärker ist als beim DWR- oder RS16-Kernmantel. Die Dichte der Druckisobaren in den Abb. 6-5 bis 6-8 kennzeichnet die Größe der lokalen Fluidbeschleunigungen, die die virtuelle Fluid-Masse ausmachen. Demnach wird auch deutlich, daß der Innenraum bezüglich der virtuellen Fluidmasse eine geringere Bedeutung hat als der Ringraum, obwohl das Verhältnis der tatsächlichen Fluidmassen gerade umgekehrt ist.

Besonders instruktiv sind in diesem Zusammenhang die in Tabelle 8 numerisch ausgewerteten, analytischen Abschätzungen

---

<sup>+</sup>) siehe § 2.3.2



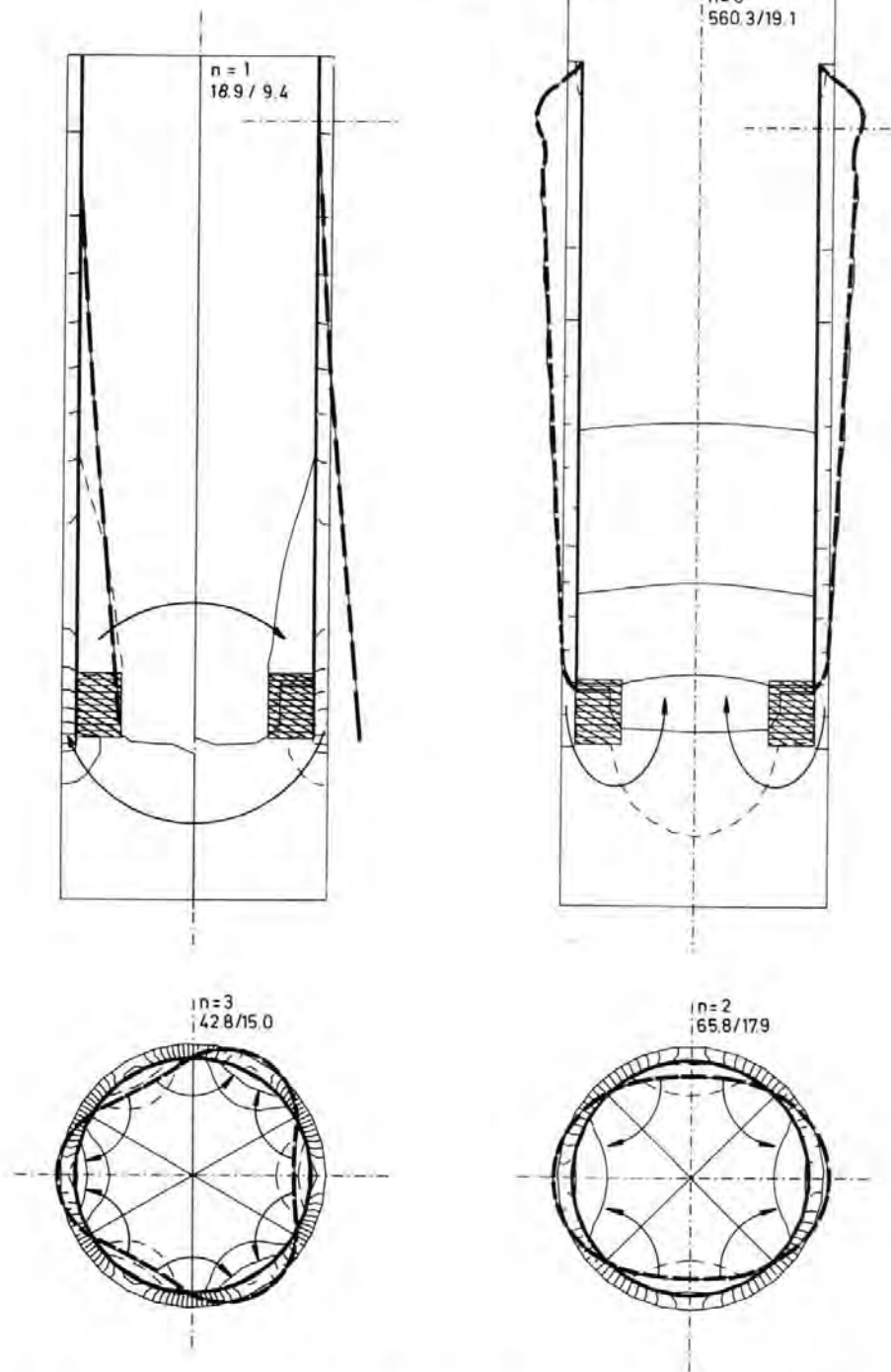


Abb. 6-5: Querschnitte durch den HDR-Kessel mit stark vergrößerten Eigenschwingungsformen des Kernmantels für die vier niedrigsten Eigenfrequenzen in Wasser und zugehöriges Druck-Isobarenfeld. Das Geschwindigkeitsfeld ist angedeutet. Die Zahl  $n$  bezeichnet den Umfangsmode. Die Frequenzen in Hz sind angegeben für Vakuum/Wasser.

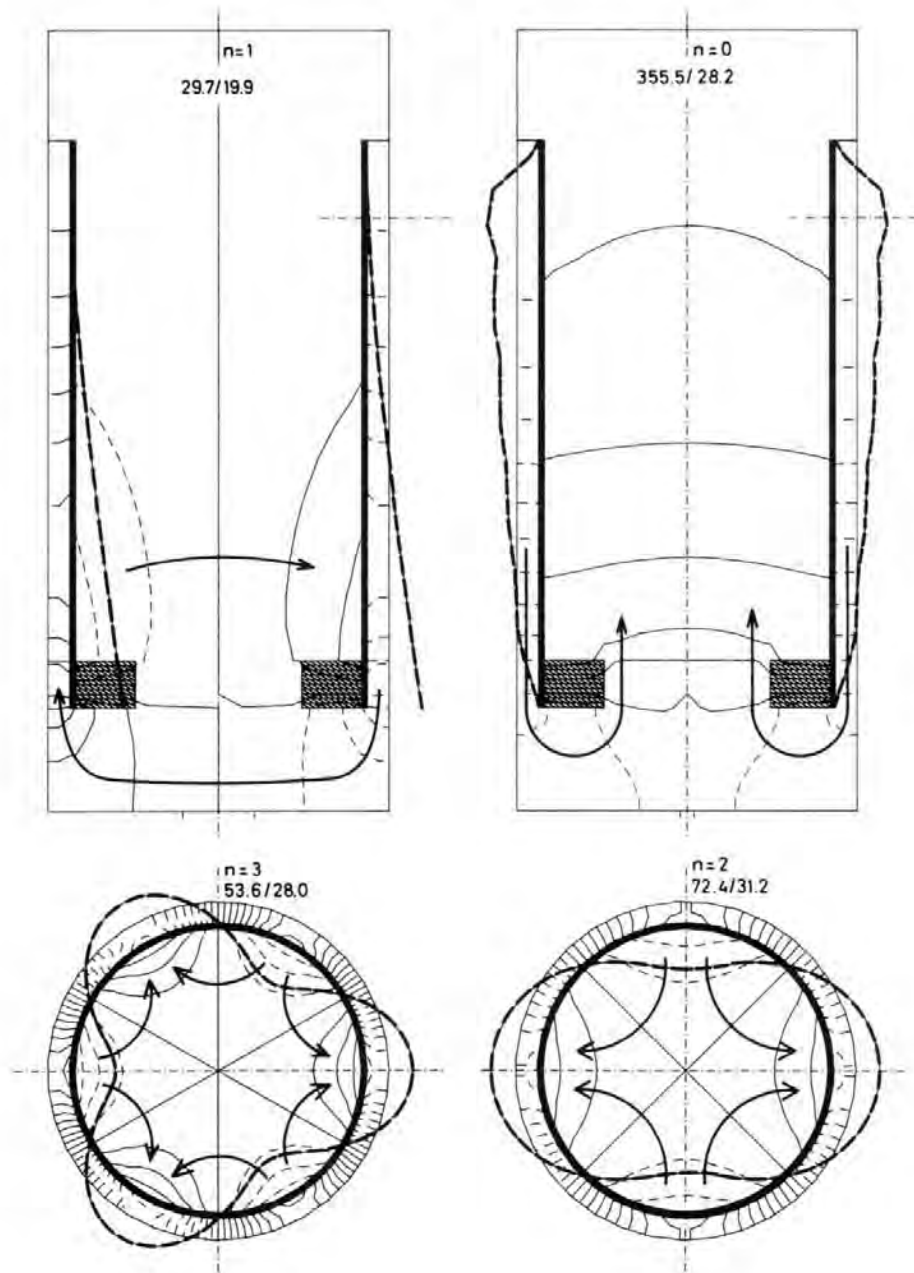


Abb. 6-6: Eigenschwingungsformen eines DWR-Kernmantels,  
vergl. Abb. 6-5.

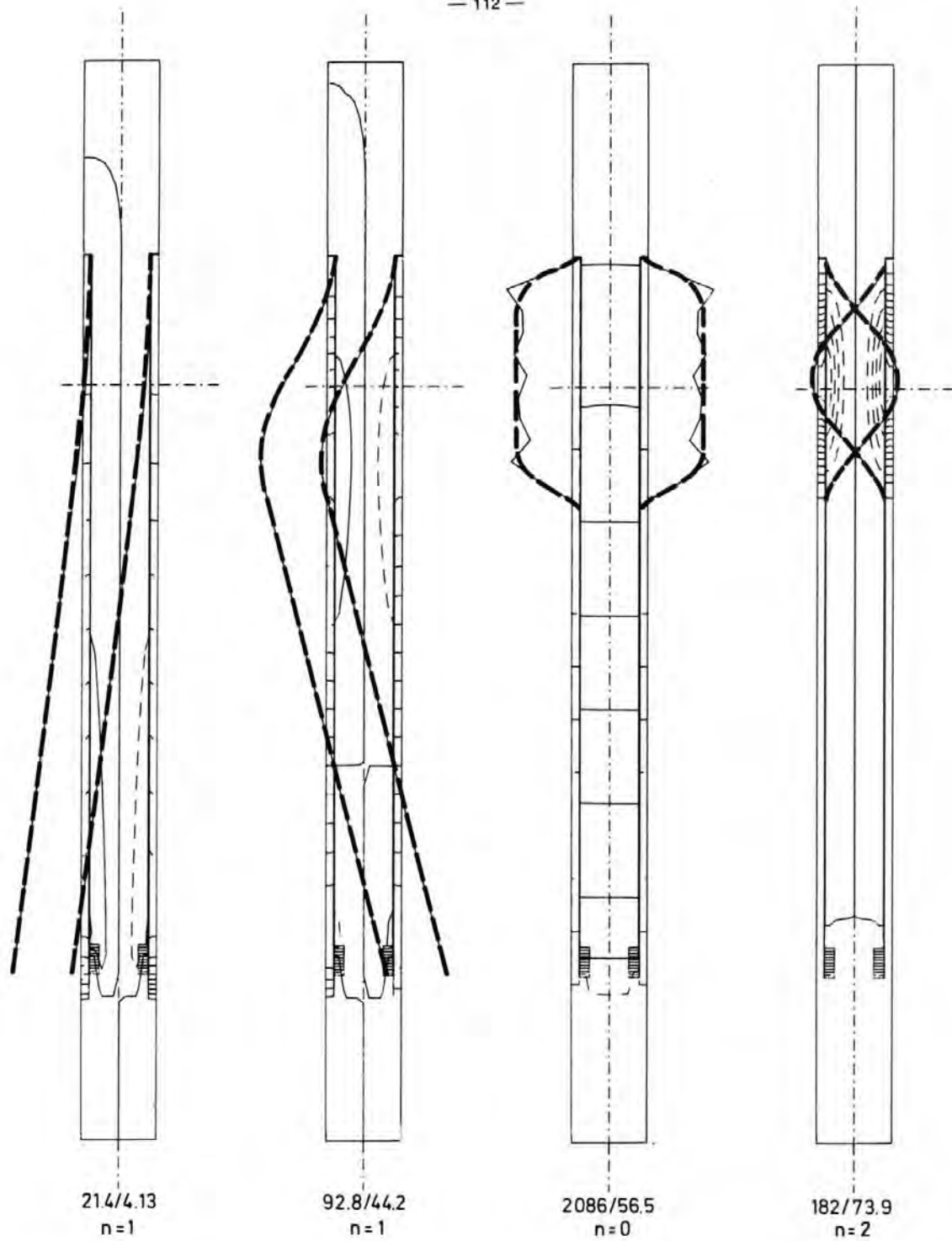


Abb. 6-7: Axiale Eigenschwingungsformen des Kernmantels bei RS16, vergl. Abb. 6-5.

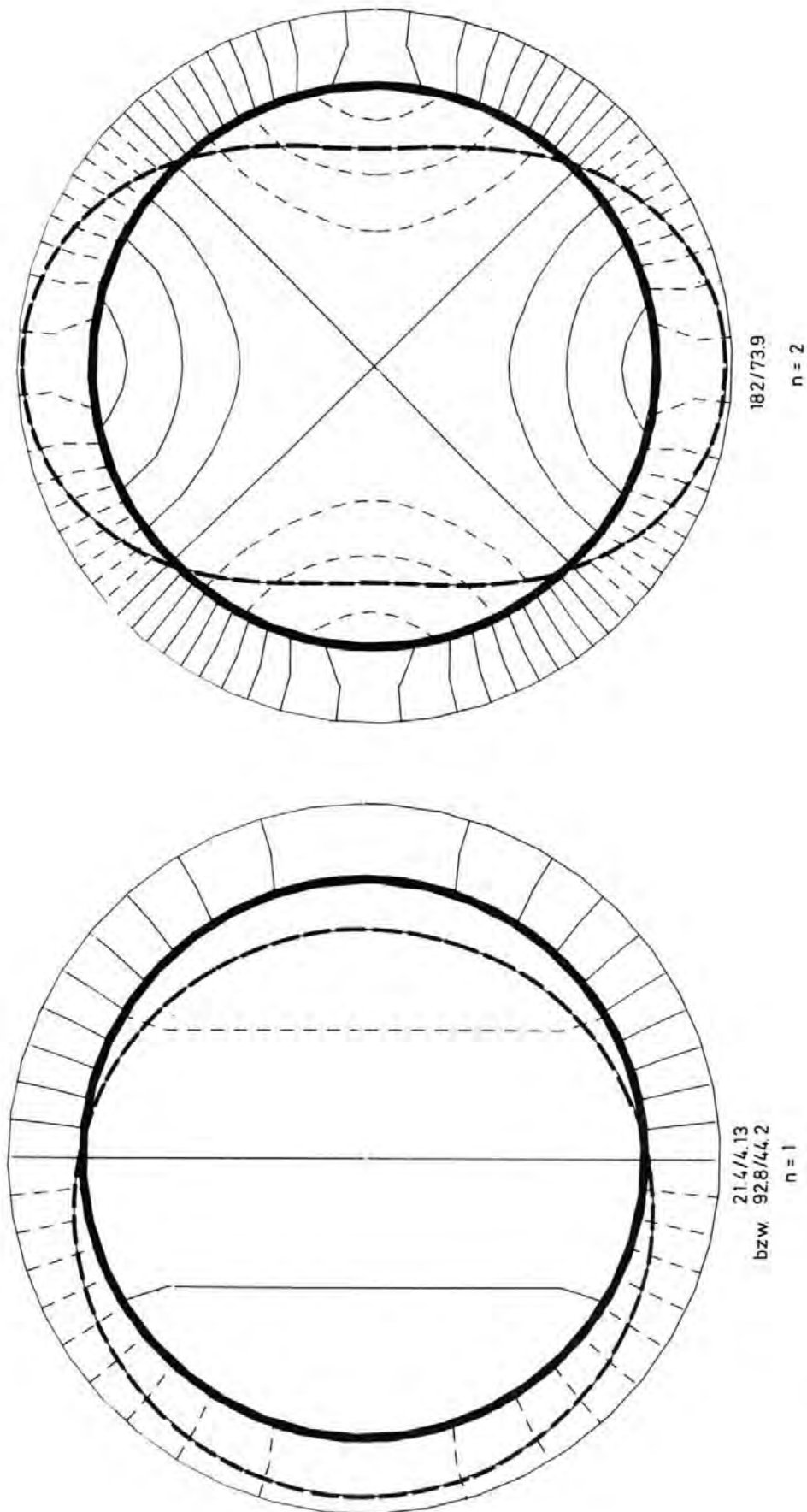


Abb. 6-8: Azimutale Eigenschwingungsformen des Kernmantels bei RS16, vergl. Abb. 6-5

gemäß § 5.3, anhand derer die relativen Beiträge der einzelnen Massen zur Schwingungsmasse für die niedrigsten Eigenfrequenzen separat angegeben werden können, siehe insbesondere Tabelle 8c. Die Näherungsrechnungen bestätigen die numerisch ermittelten Eigenfrequenzen. Die Näherungsformeln liefern etwas größere Eigenfrequenzen als die FLUX-Rechnungen. Dies ist konsistent mit der Tatsache, daß bei ungenauer Kenntnis der Eigenschwingungsform die kleinste Eigenfrequenz stets überschätzt wird (s. [67, § 2.10\_7, Stichwort "Rayleigh Quotient").

Weiterhin wurde der Effekt des unteren Plenums dadurch untersucht, daß die Eigenfrequenzen einmal mit und einmal ohne unteres Plenum berechnet wurden. Der Fall mit unterem Plenum ist der Normalfall. Ohne unteres Plenum soll heißen, daß an der Grenze von den Bereichen 1 und 2 noch Bereich 3 in Abb. 2-3 eine feste Wand eingezogen wird, an der der Massering reibungsfrei gleiten kann. Damit ist der Atmungsmodus unmöglich gemacht und der nächstgrößte Einfluß wird für den Balken-Biege-Modus erwartet. Die numerischen Ergebnisse für diesen Modus lauten im Falle des HDR:

mit Plenum  $f = 9,1 \text{ Hz}$

ohne Plenum  $f = 7,7 \text{ Hz}$

Die Ausgleichsströmung über das untere Plenum vermindert die im Ringraum erforderlichen Fluidbeschleunigungen, dadurch die virtuelle Masse, und führt so zu den etwa um 15 % erhöhten Eigenfrequenzen.

Eine weitere Detailstudie betrifft den Effekt des Masserings in seiner Eigenschaft als Verdrängungskörper auf die Eigenschwingungen. Die größten Unterschiede zwischen Rechnungen mit und ohne den Ring sind im Atmungsmodus festzustellen. Die Eigenfrequenz ist mit Ring im Falle des HDR etwa um 7 % kleiner als ohne Ring. Auch hier ist verständlich, daß der Ring

durch die damit verbundene Einschnürung des Strömungsquerschnittes zu vergrößerten Beschleunigungen und virtuellen Massen des Fluids führt.

Schließlich wurden die resultierenden Eigenfrequenzen für folgende (HDR-) Fälle gegenübergestellt:

- a) in Wasser
- b) Wasser im Ringraum, aber Vakuum im Innenraum
- c) in Vakuum.

Durch Vergleich der Fälle b) und c) wird der Einfluß des Innenraums erkennbar. Abb. 6-9 zeigt beispielhaft Ergebnisse für den Kosinusmode  $n = 2$  und  $n = 8$  sowie für verschiedene axiale Schwingungsformen ( $m = 1, 2, \dots, 8$ ). Man erkennt, daß die Vernachlässigung des Innenraums zu Fehlern bezüglich der Eigenfrequenz in der Größenordnung 20 % führt, wobei diese Fehler mit  $m$  und  $n$  schwach zunehmen.

Alle diese Ergebnisse machen die Wichtigkeit der Erfassung der virtuellen Fluid-Masse, insbesondere im Ringraum, aber auch im Innenraum und unteren Plenum deutlich.

Es verbleibt die Frage nach dem Effekt der in FLUX1 vernachlässigten Kompressibilität. Eine Dimensionsanalyse der kompressiblen Druckgleichung (2-3) liefert die Aussage, daß die Kompressibilität des Fluids für die Eigenanalyse zu Recht vernachlässigt werden kann, solange

$$f^2 \ll \frac{\alpha^2}{L^2} \quad , \quad (6-1)$$

wobei  $\alpha$  = Schallgeschwindigkeit,  $f$  = Frequenz und  $L$  = charakteristische Länge der Fluidbewegung. Mit  $\alpha \approx 1000$  m/s und  $L \lesssim 10$  m folgt  $f^2 \ll (100 \text{ Hz})^2$ . D.h., für die in Tabelle 7 angegebenen Ergebnisse der zehn niedrigsten Eigenfrequenzen in Wasser erscheint die Vernachlässigung der Kompressibilität als gerade noch zulässig.<sup>\*)</sup> Bei zweiphasigem Fluid wäre wegen der stark verringerten Schallgeschwindigkeit die Kompressibilität erwartungsgemäß nicht mehr vernachlässigbar.

---

<sup>\*)</sup> Bei den höheren Frequenzen sind allerdings auch die charakteristischen Längen kleiner.

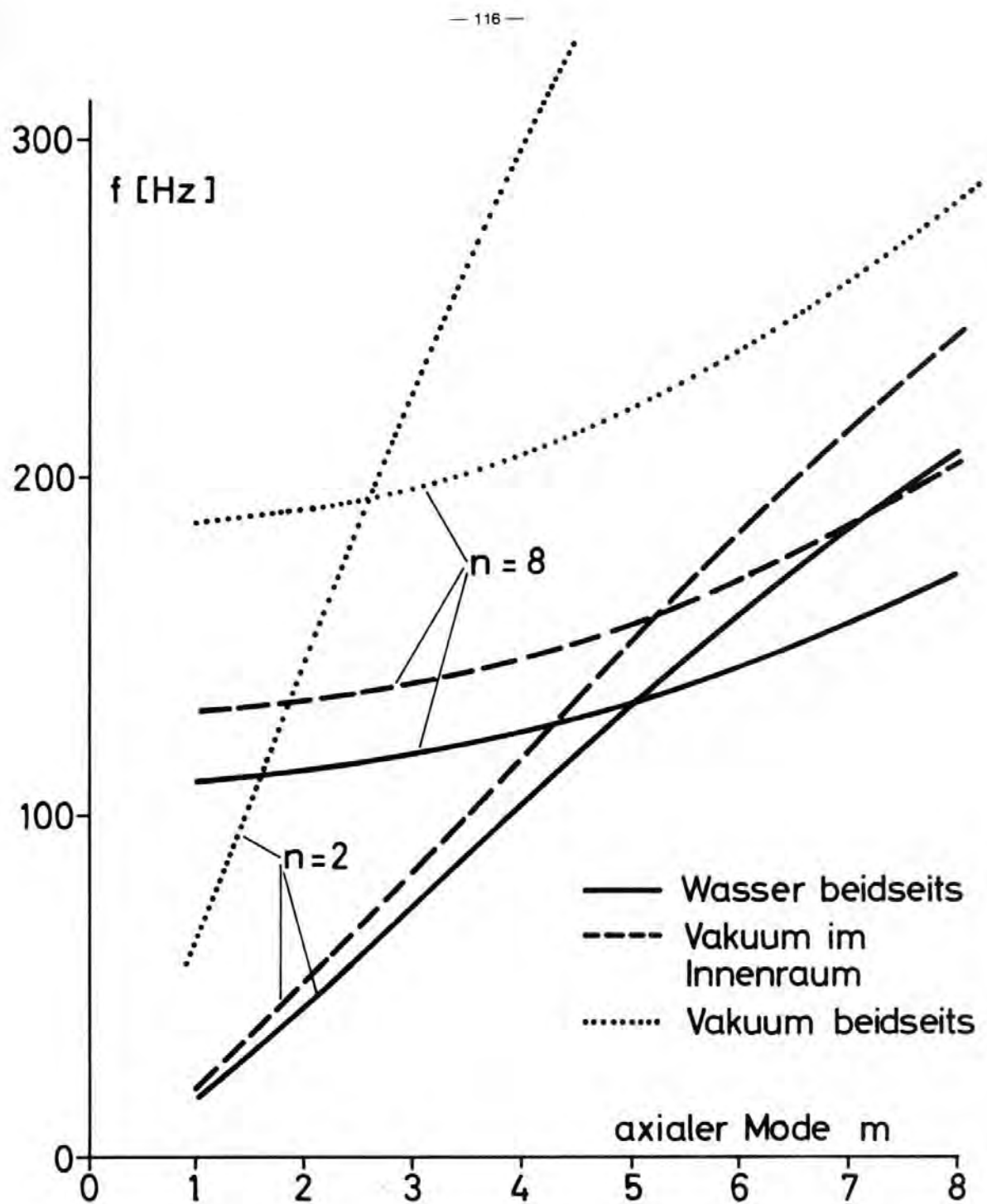


Abb. 6-9: Einfluß des Wassers im Innen- und Ringraum auf die Eigenfrequenzen  $f$  für verschiedene axiale ( $m$ ) und azimutale ( $n$ ) Modes des HDR.

### 6.2.3 Dämpfung

Der gemäß § 5.2 näherungsweise erfaßbare Einfluß der viskosen Reibung des Fluids an Wänden ist um so größer, je größer die induzierten Geschwindigkeiten sind. Er ist daher beim Atmungs- und Balken-Biege-Mode maximal. Hierfür wurde die Dämpfung nach den Näherungsformeln des § 5.3 ermittelt, siehe Tabelle 8. Für das Lehrsche Dämpfungsmaß [100, S. 65\_7

$$\zeta = D / (2 (M+F) \omega) \quad (6-2)$$

ergeben sich bei Berücksichtigung allein der laminaren Reibung verschwindend kleine Werte von

$$\zeta < 10^{-6}.$$

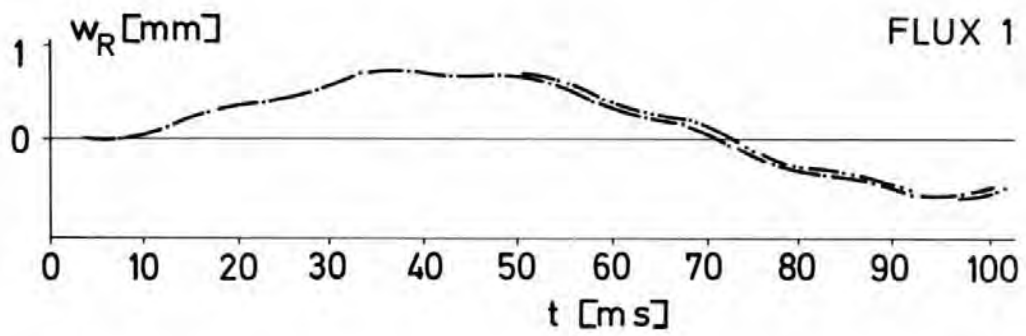
Dies Maß beschreibt den Energieverlust durch Reibung pro Schwingungsperiode. Selbst wenn statt der molekularen Zähigkeit ein tausendfach größerer Wert zur Berücksichtigung eventueller Turbulenzen eingesetzt wird, ist die Dämpfung also praktisch - insbesondere im Hinblick auf die relativ kurzzeitigen Vorgänge beim Blowdown - vernachlässigbar klein.

### 6.2.4 Struktur-Verformung

Gemäß § 5.1 bzw. [93\_7] wird die dynamische Reaktion des Kernmantels unter der für starre Struktur berechneten Drucklast mit Einschluß der virtuellen Fluid-Masse ermittelt.

Abb. 6-10 zeigt die radiale Verformung des Kernmantels am Massering  $w_R$  und am Stutzen  $w_S$  als Funktion der Zeit. Gegenübergestellt sind Rechenergebnisse für die drei Maschennetze N1, N2 und N3. Die maximalen Auslenkungen betragen weniger als 1 mm. Die Annahme (A7 gemäß § 2.1) kleiner Strukturverformungen wird nun also durch die Rechnung als gültig bestätigt. Der Massering ( $w_R$ ) reagiert relativ träge auf die schlagartig aufgebrachte Last. Wesentlich schneller erreicht die Verformung in Stutzennähe ihren Maximalwert. Der Einfluß der Diskretisierung ist gering. Bei  $w_R$  sind die Ergebnisse von N2 und N3 im Rahmen





— — — N1  
 — — — N2  
 — — — N3

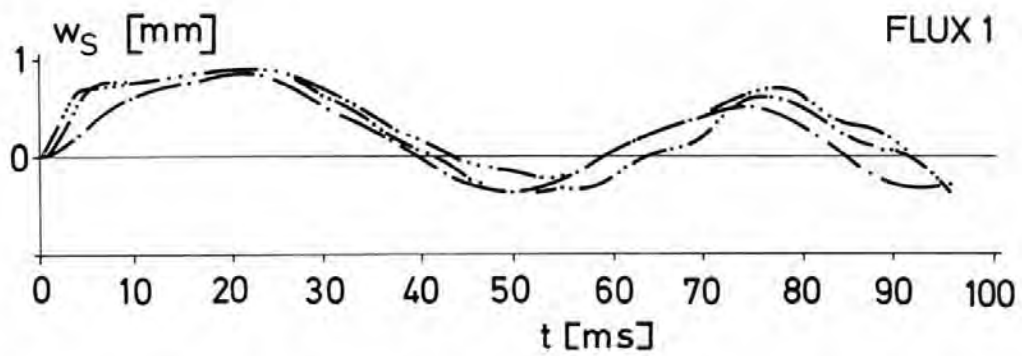
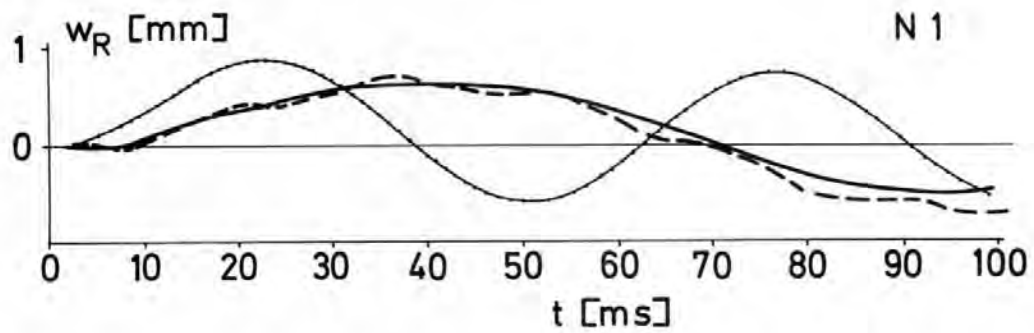


Abb. 6-10: Einfluß der Diskretisierung (Netze N1, N2 und N3) auf die mit FLUX1 berechnete radiale Kernmantel-Verformung am Masse-Ring ( $w_R$ ,  $z = 7,57$  m) und am Stützen  $w_S$ ,  $z \approx 0,8$  m) (Fälle F1, F2, F3).



— · — · — FLUX1  
 ····· FLUX1, entkoppelt  
 — FLUX2, inkompressibel  
 - - - FLUX2, kompressibel

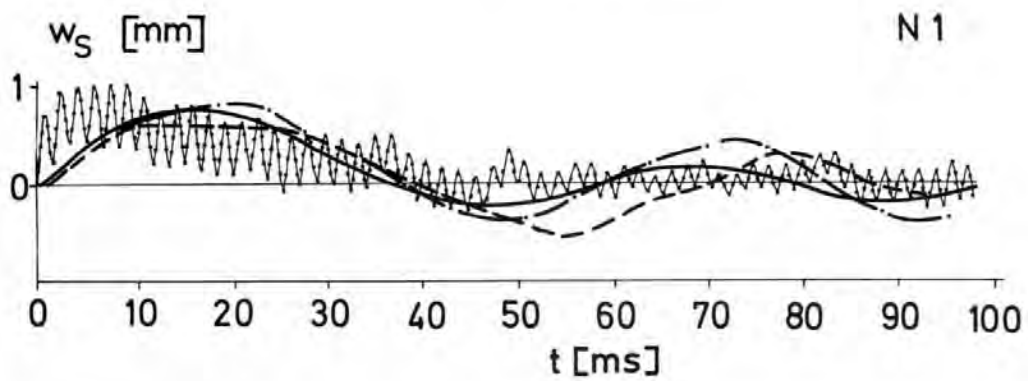


Abb. 6-11: Einfluß verschiedener Modelle auf die Kernmantelverformung  $w_R$  am Ring und  $w_S$  am Stützen (Fälle F1, F1 ohne virtuelle Masse, H1I, H1).

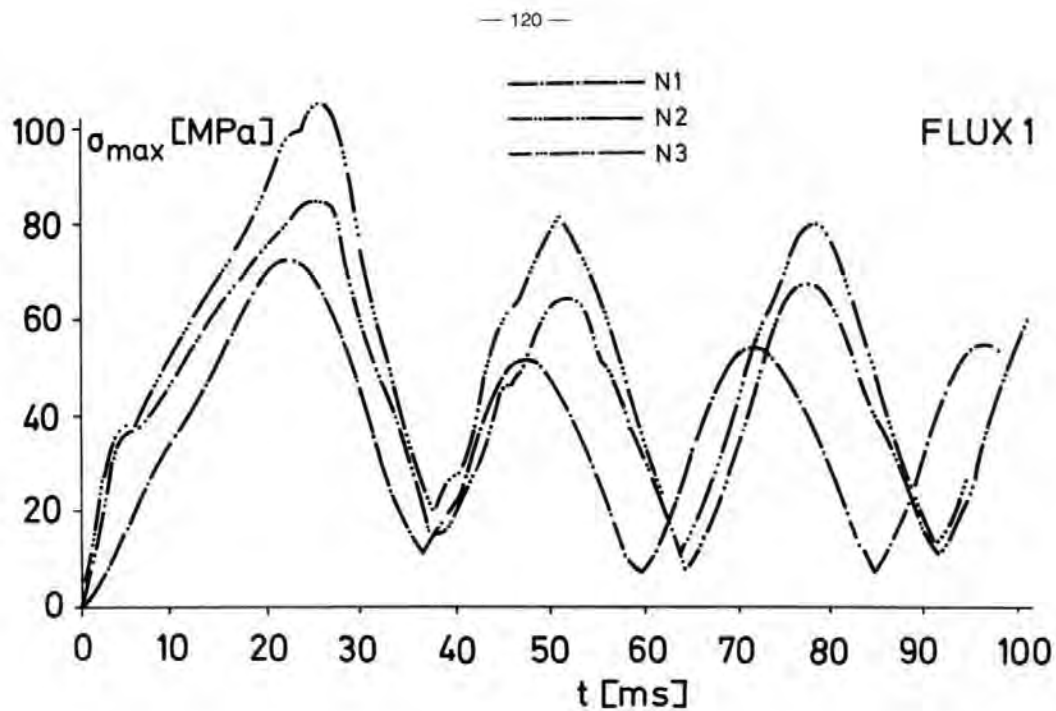


Abb. 6-12: Einfluß der Diskretisierung auf die maximalen Spannungen im FLUX1-Modell.

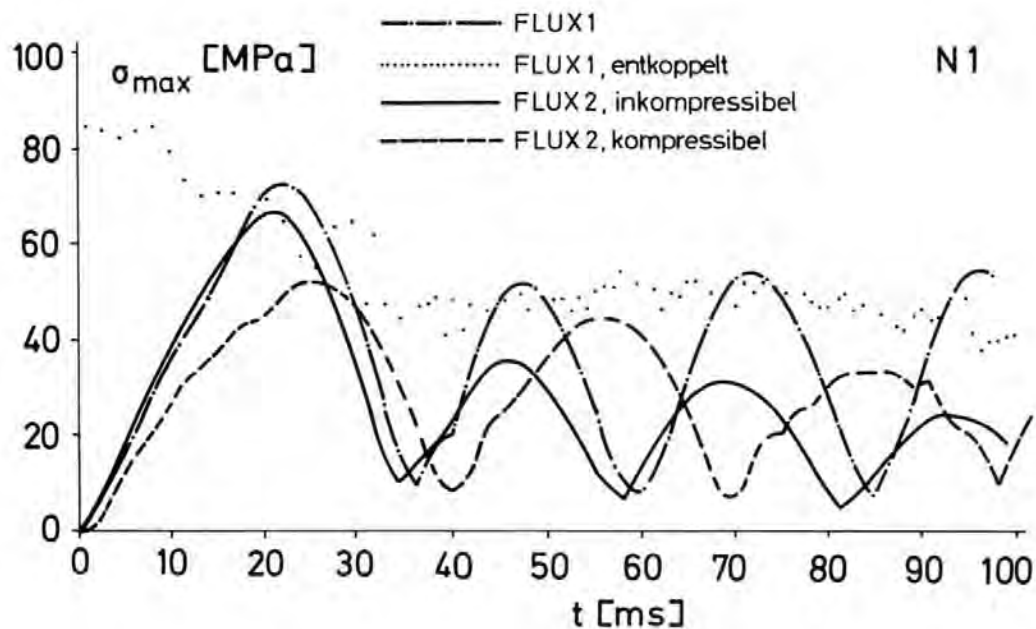


Abb. 6-13: Einfluß verschiedener Modelle auf die maximalen Spannungen für Netz N1. Im Falle FLUX1-entkoppelt kennzeichnen die Punkte die jeweiligen Maxima der eigentlich stark oszillierenden Kurve.

der Zeichengenauigkeit gleich. Dies Ergebnis ist erstaunlich, wenn man bedenkt, daß sonst für Schalenrechnungen sehr viele Freiheitsgrade als notwendig erachtet werden [68\_7].

Abb. 6-12 zeigt entsprechend die maximale Spannung im Kernmantel. Die Spannungen werden in FLUX1 und FLUX2 mit CYLDY2-Programmen [101\_7] an Orten entsprechend den Mittelpunkten der benachbarten Fluidmaschen sowie an der oberen Einspannung und der Ringbefestigung ermittelt. Diese Berechnung erfolgt zudem für die äußere und innere Kernmantelwand und die Kernmantel-Mittelfläche. Aus den Spannungstensenoren folgt eine äquivalente Vergleichs-Spannung. Im vorliegenden Fall liegt das so berechnete Spannungsmaximum mit ca. 100 MPa (ca. 10 kp/mm<sup>2</sup>) unter der Streckgrenze von ca. 12 bis 15 kp/mm<sup>2</sup> des Kernmantel-Materials. Die größte Spannung tritt nach ca. 25 ms auf. In Tabelle 4 sind die Zeitpunkte  $t_{max}$  und Orte  $(z_{max}, \varphi_{max})$  an denen die maximale Spannung  $\sigma_{max}$  auftritt, für eine Reihe von Fällen aufgelistet. Man erkennt, daß hier die Diskretisierung eine wesentliche Rolle spielt. Während bei grober Strukturdiskretisierung die maximale Spannung etwas früher und in der Nähe des Stützens auftritt, liefert eine feinere Diskretisierung die Maximalwerte etwas später und dann an der Einspannung und dem Stützen gegenüber. Bezüglich der quantitativen Spannungsberechnung ist also eine Diskretisierung mindestens von der Feinheit des Netzes N3 erforderlich.

Ein Vergleich der Fälle F1, F2 mit FD1, FD2 gemäß Tabelle 4 läßt keine deutliche Überlegenheit einer der Approximationsarten - spektral oder mit finiten Differenzen - für die azimuthalen Ableitungen erkennen. Vermutlich macht sich die bessere Konvergenz-Geschwindigkeit der spektralen Approximation erst bei feineren Netzen als N2 bemerkbar.

In Abb. 6-11 und 6-13 sind für das Netz N1 die eben diskutierten Größen nach verschiedenen Berechnungsmethoden gegenübergestellt. Verglichen werden

a) FLUX1-Ergebnisse mit virtueller Fluid-Masse (Fall F1)

- b) FLUX1-Ergebnisse ohne virtuelle Fluid-Masse ("entkoppelt")
- c) FLUX2-Ergebnisse inkompressibel (Fall H1I)
- d) FLUX2-Ergebnisse kompressibel (Fall H1).

Die größte Abweichung vom Bezugsfall a) liefert der Fall b). Ohne Berücksichtigung der virtuellen Fluid-Masse, d.h. bei entkoppelter Rechnung, sind die Schwingungszeiten erwartungsgemäß deutlich kleiner. Die maximalen Spannungen sind hier etwa 20 % größer als im Fall a) und treten früher auf. Dies ist darauf zurückzuführen, daß die Struktur unmittelbar der Last folgt, die in der Anfangszeit maximal ist (vergl. Abb. 5-1).

Die FLUX1-Ergebnisse stimmen beachtlich gut mit den inkompressibel ermittelten FLUX2-Ergebnissen (Fall c) überein, bei denen die vollständigen gekoppelten Gleichungen auch unter Erfassung der Nichtlinearitäten und des Einflusses des Blow-down-Rohres integriert werden. Da in diesen Rechnungen zum Zeitpunkt  $t = 0$  ein Drucksprung auftritt, ist das Newmark-Verfahren nicht geeignet (es sei denn, man würde als Anfangswert für den Druck den zum Zeitpunkt  $t \gtrsim 0$  gültigen Wert benutzen, der aber nicht ohne weiteres bekannt ist). Vielmehr muß die vollimplizite ICE-Technik benutzt werden, bei der die Anfangswerte eine geringere Rolle spielen. Dies bewirkt eine numerische Dämpfung (vergleiche Anhang 2), die die Ursache für die kleineren Verformungen und Spannungen zu Zeiten  $t \gtrsim 20$  ms sein kann.

Für den kompressiblen Fall liefert FLUX2 kleinere Lasten auch bei (numerisch) ungedämpfter Rechnung. Dies ist auf die weniger schlagartig auf den Kernmantel auftreffende Last zurückzuführen. Die Unterschiede sind jedoch nicht sonderlich groß. Im Gegenteil zeigen diese Ergebnisse die Brauchbarkeit des inkompressiblen FLUX1-Modells.

### 6.3 FLUX2: Ergebnisse für den HDR bei kompressiblem Fluid, Diskussion und Parametervariation

#### 6.3.1 Qualitative Beschreibung der Ergebnisse

Einen guten Eindruck von den mit FLUX2 für kompressibles Fluid berechneten Bewegungen gibt ein Computer-generierter Film  $\angle 102_7$ , aus dem Abb. 6-14 und 6-15 Momentaufnahmen zeigen. Eine Folge von Druckfeldern ist in Abb. 6-16 und 6-17 und eine Folge von Strukturverformungsbildern in Abb. 6-18 und 6-19 einmal ohne und einmal mit Fluid-Strukturkoppelung dargestellt. Man erkennt das Einlaufen der Druckentlastungswelle durch den Bruchstutzen in den Ringraum sowie in Abb. 6-14, 6-18 und 6-19 die simultane Verformung des Kernmantels.

Interessant ist eine Gegenüberstellung der entkoppelten (Abb. 6-16) mit der gekoppelten (Abb. 6-17) Rechnung. Während bei entkoppelter Rechnung die Druckwellen nur über das untere Plenum in den Innenraum gelangen können, ist in Abb. 6-17 die Druckentlastung im Innenraum infolge der Aufblähung des Kernmantels deutlich. Bei entkoppelter Rechnung laufen die Wellen schneller als bei gekoppelter Rechnung, da im letzteren Fall die Nachgiebigkeit der Wand zu einer erhöhten virtuellen Kompressibilität des Fluids, insbesondere im Ringraum, führt. Dies entspricht der theoretischen Aussage gemäß § 3.3.2. Ein Vergleich des entkoppelt gerechneten Vorganges nach Abb. 6-16 mit den vorhergeschätzten Vorgängen nach Abb. 1-1 bestätigt die Erwartungen in groben Zügen. Ein markanter Unterschied ist allerdings die relativ starke und frühzeitige Druckabsenkung im Ringraum gegenüber dem Stutzen. Dies liegt an dem relativ kurzen Weg am Umfang um den Kernmantel herum sowie an diversen Reflektionen.

Ohne Rückkoppelung sind die Strukturbewegungen nicht nur zeitlich, sondern auch räumlich kurzweiliger. Dies zeigt ein Vergleich von Abb. 6-18 mit 6-19 (oberer Teil). Während anfangs die radiale positive Auslenkung des Kernmantels in Stutzennähe überwiegt und dann der Massering in Schwingungen gerät, ist

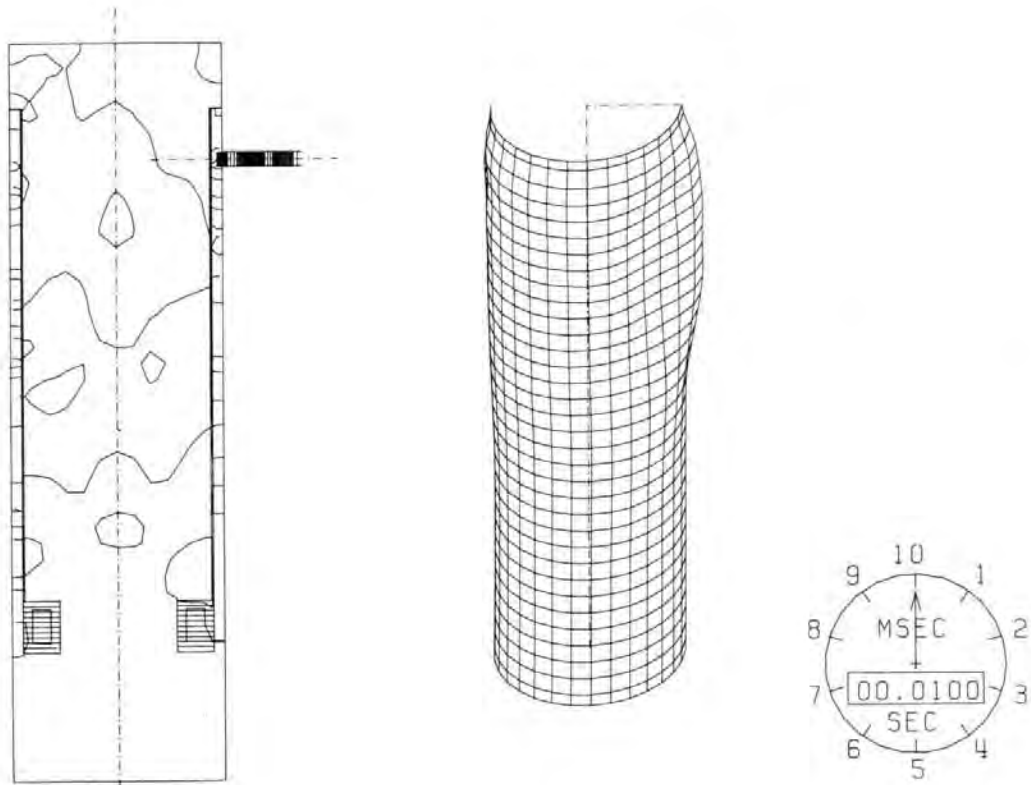


Abb. 6-14: Film-Ausschnitt: HDR-Druckfelder (Höhenlinien-Differenz,  $\Delta p = 1$  bar) und Strukturverformung (300fach vergrößert) für  $t = 10$  ms, Netz N3, mit Struktur-Rückwirkung.

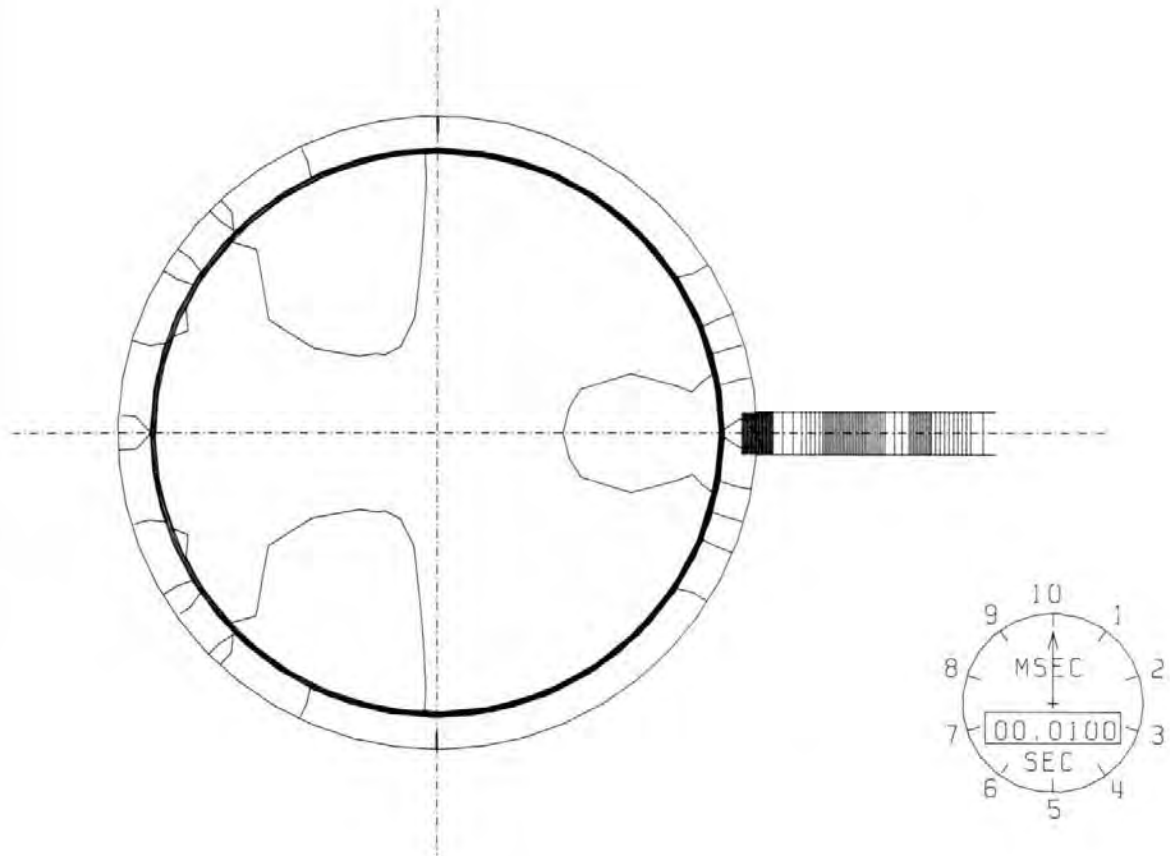


Abb. 6-15: Film-Ausschnitt: HDR-Druckfeld (Höhenlinien-Differenz,  $\Delta p = 1$  bar) für  $t = 10$  ms, Netz N3, mit Struktur-Rückwirkung.



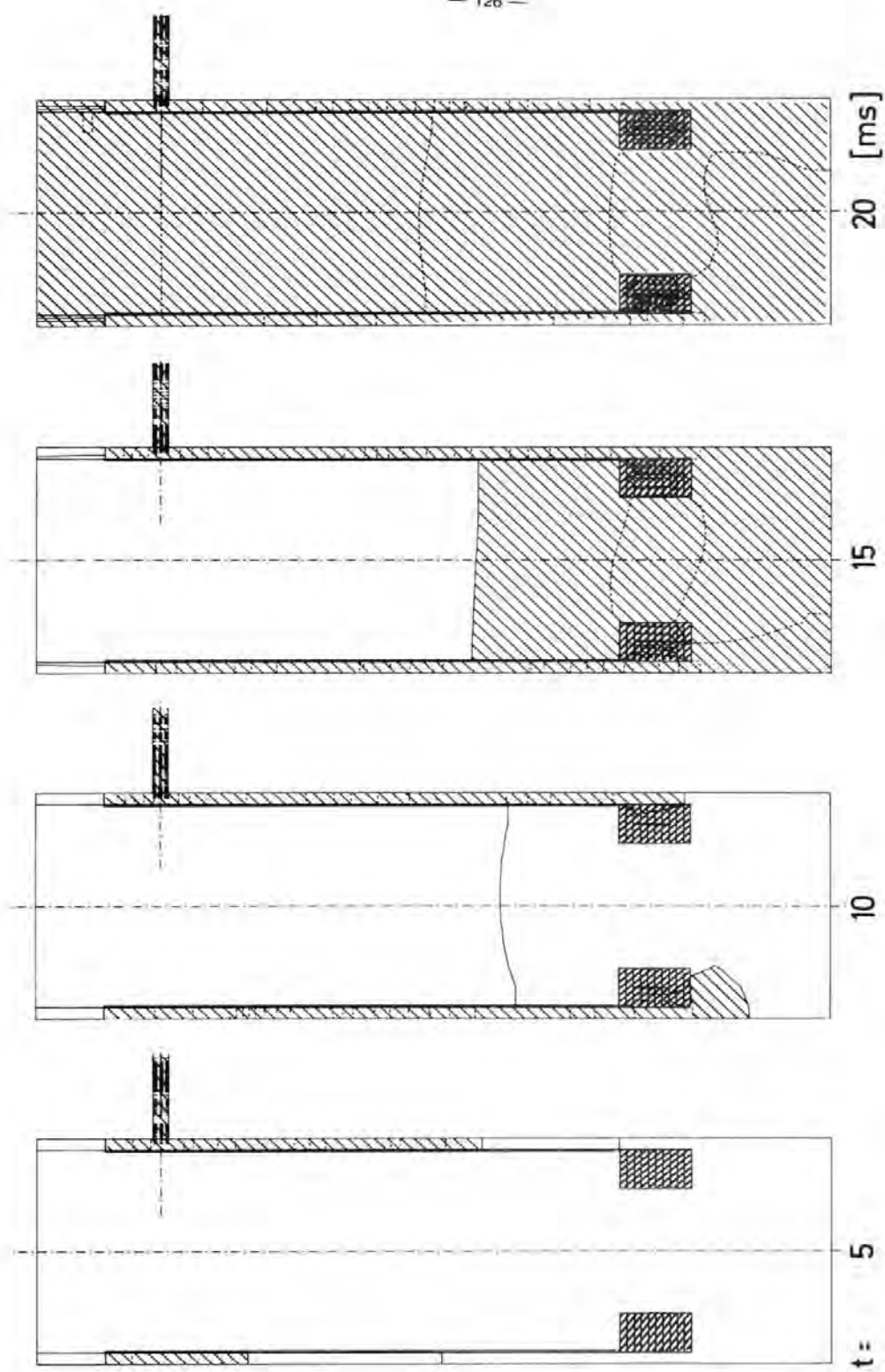


Abb. 6-16: Druckwellen-Ausbreitung im HDR ohne Struktur-Rückwirkung auf das Fluid (Fall HE), Höhenlinien-Differenz  $\Delta p = 1$  bar. Schraffiert sind Bereiche mit einer Druckabsenkung von mehr als 1 bar.

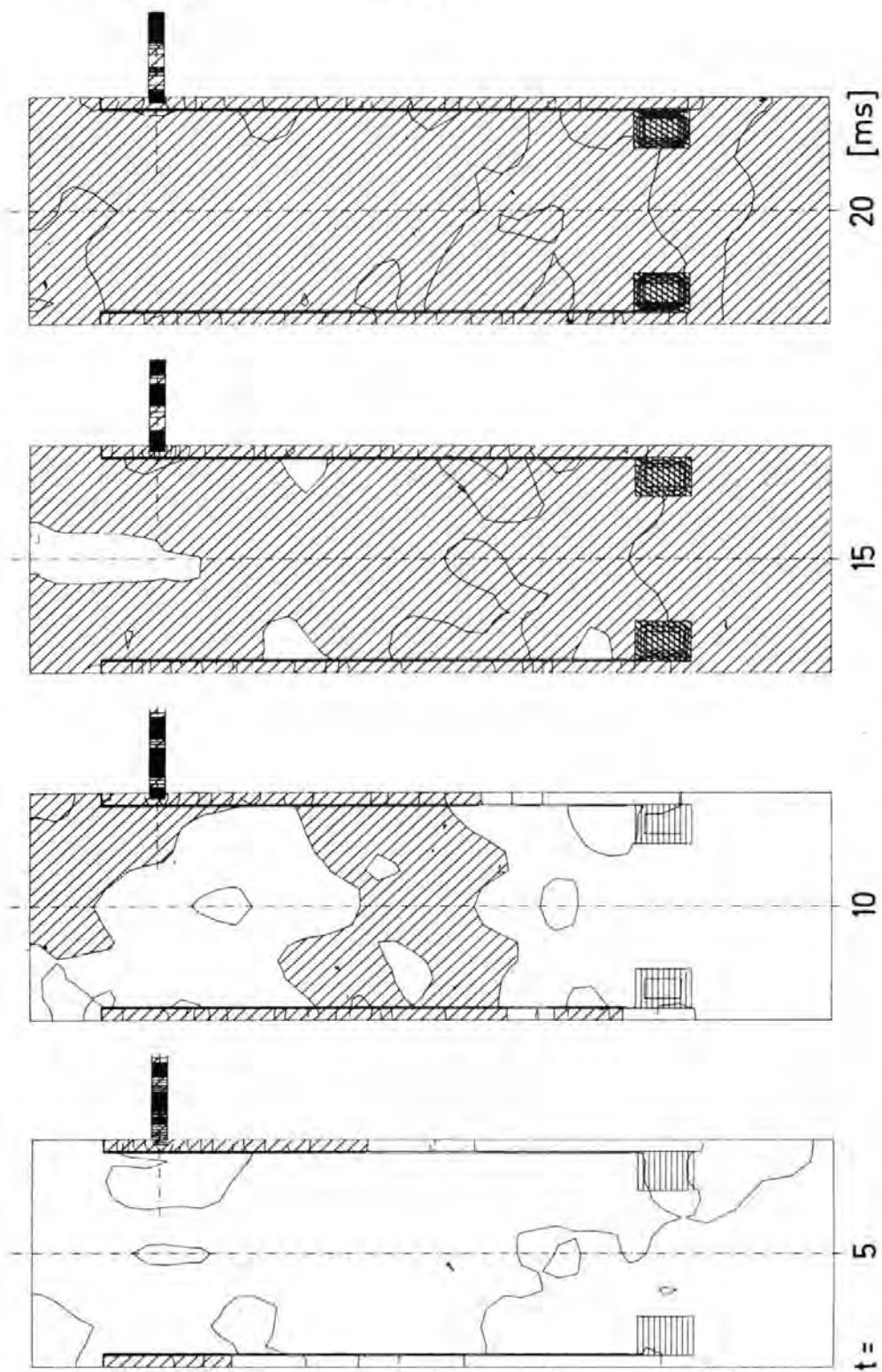


Abb. 6-17: Druckwellen-Ausbreitung im HDR mit Struktur-Rückwirkung auf das Fluid (Fall H3).  
Höhenlinien-Differenz  $\Delta p = 1$  bar. Schraffiert sind Bereiche mit einer Druck-  
absenkung von mehr als 1 bar.

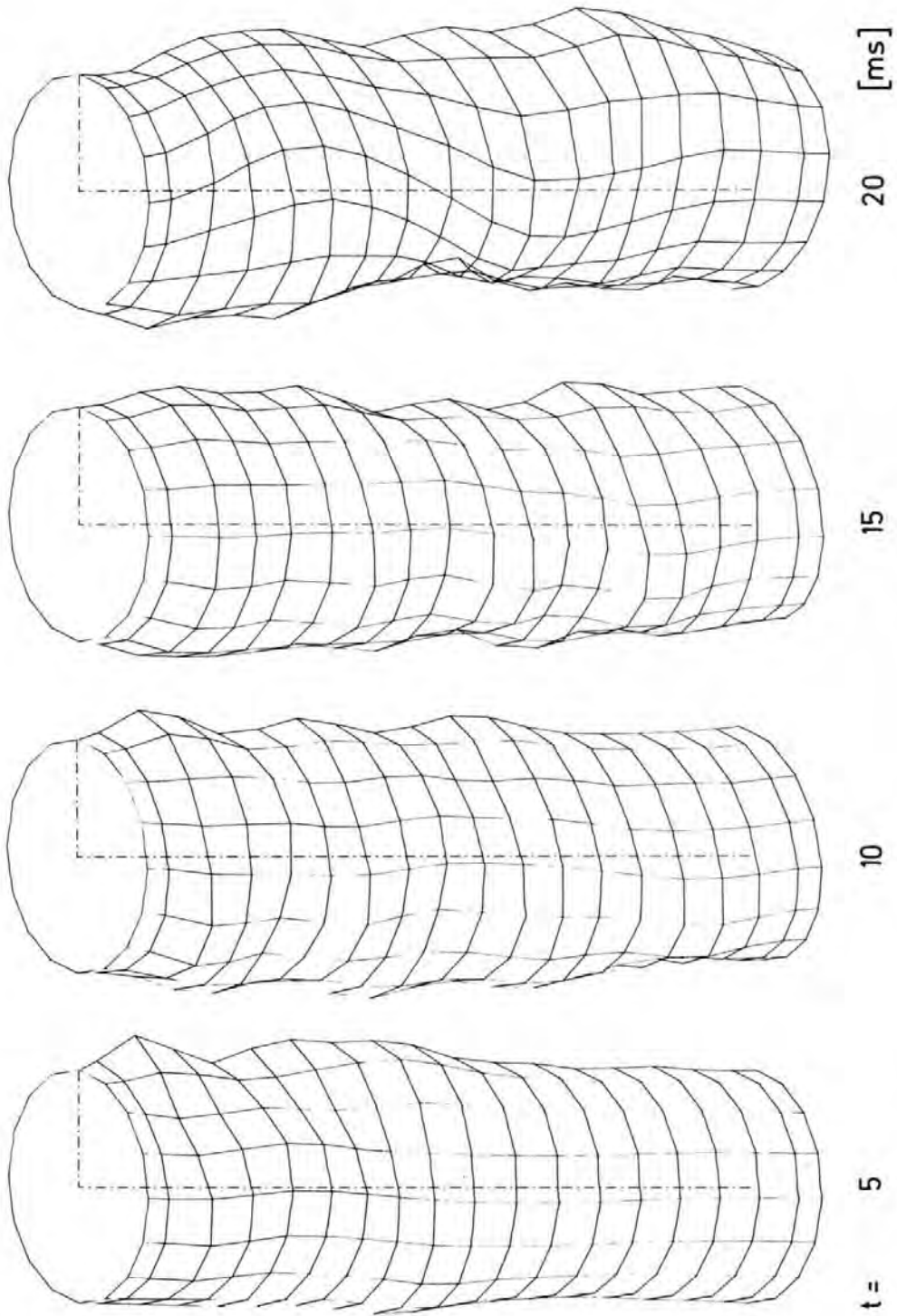


Abb. 6-18: HDR-Kernmantel-Verformung ohne Rückwirkung auf das Fluid. Fall HE, Netz N2.  
Verformungen sind 300-fach vergrößert.

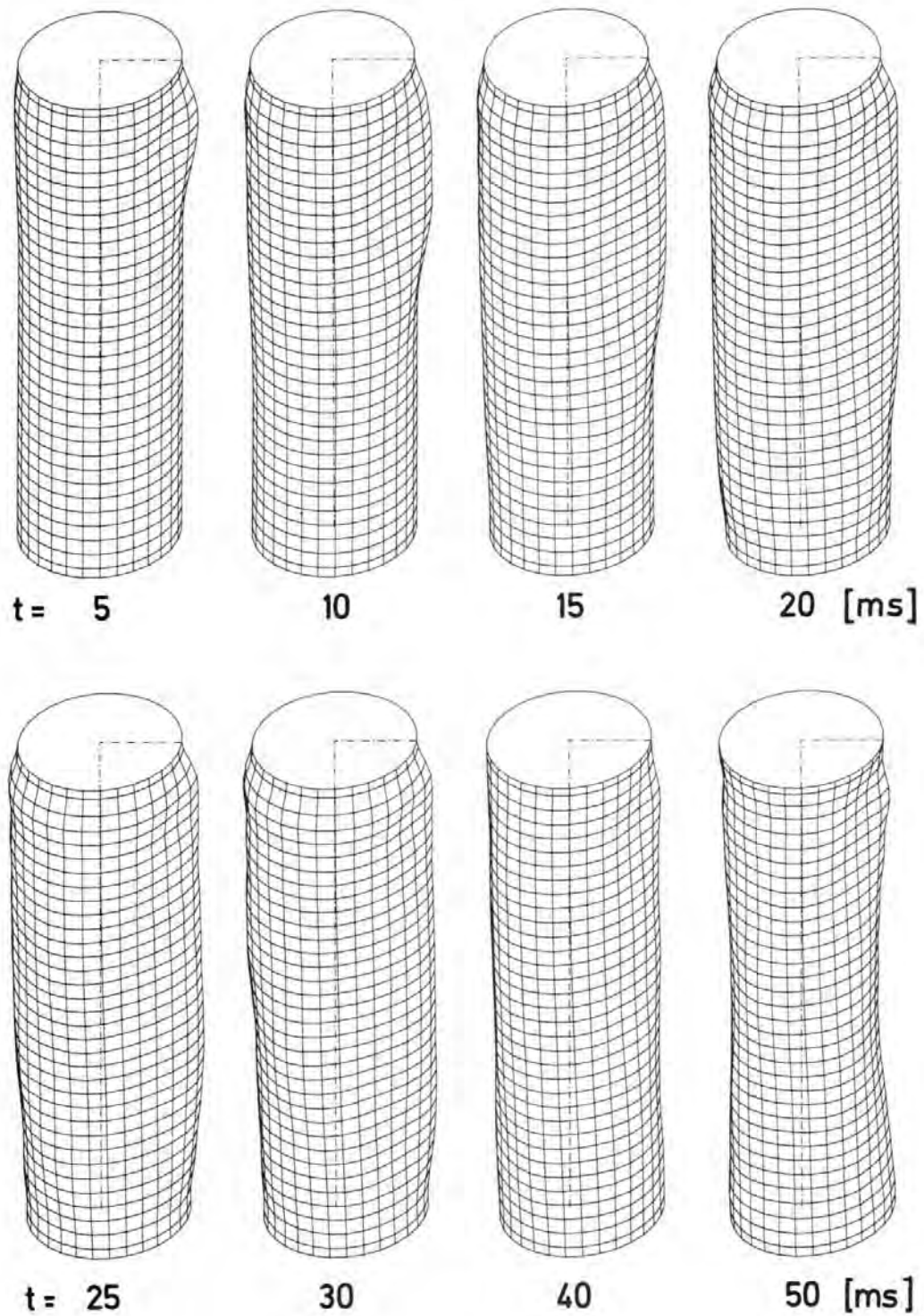


Abb. 6-19: HDR-Kernmantel-Verformung mit Rückwirkung auf das Fluid, Fall H3, Netz N3. Die Verformungen sind 300fach vergrößert.

später eine Einschnürung des Kernmantels (bei  $t = 50$  ms, Abb. 6-19) zu beobachten, die eine Folge der Rückschwingung, offenbar vornehmlich im Atmungs-Mode, ist. Dies paßt etwa zur Eigenfrequenz von 20 Hz in diesem Mode gemäß Tabelle 7.

In diesen "statischen" Bildern weniger sichtbar sind die relativ heftigen quasi-akustischen Druckschwingungen im Bruchstutzen mit einer Frequenz von  $\alpha/(2L_s) \approx 495$  Hz, die im Film und einigen später zu erläuternden Ergebnissen erkennbar sind.

### 6.3.2 Einfluß des Integrationsverfahrens

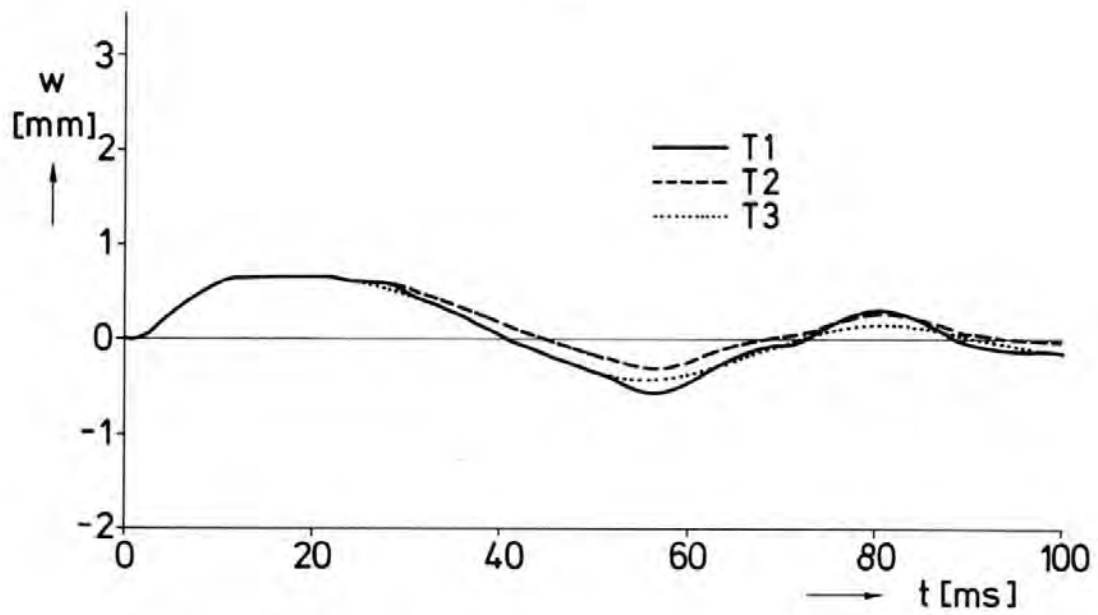
Wie verschiedentlich bereits ausgeführt wurde, bietet FLUX2 eine Wahl hinsichtlich des Integrationsverfahrens. Hier soll an einem Beispiel das Ausmaß der numerischen Dämpfung bei Verwendung des voll-impliziten ICE-Verfahrens demonstriert werden. Zu diesem Zweck werden Rechenergebnisse der Fälle T1, T2 und T3 (siehe Tabelle 3) gegenübergestellt. Kurz gefaßt entspricht

Fall T1: Newmark, ohne physikalische Dämpfung

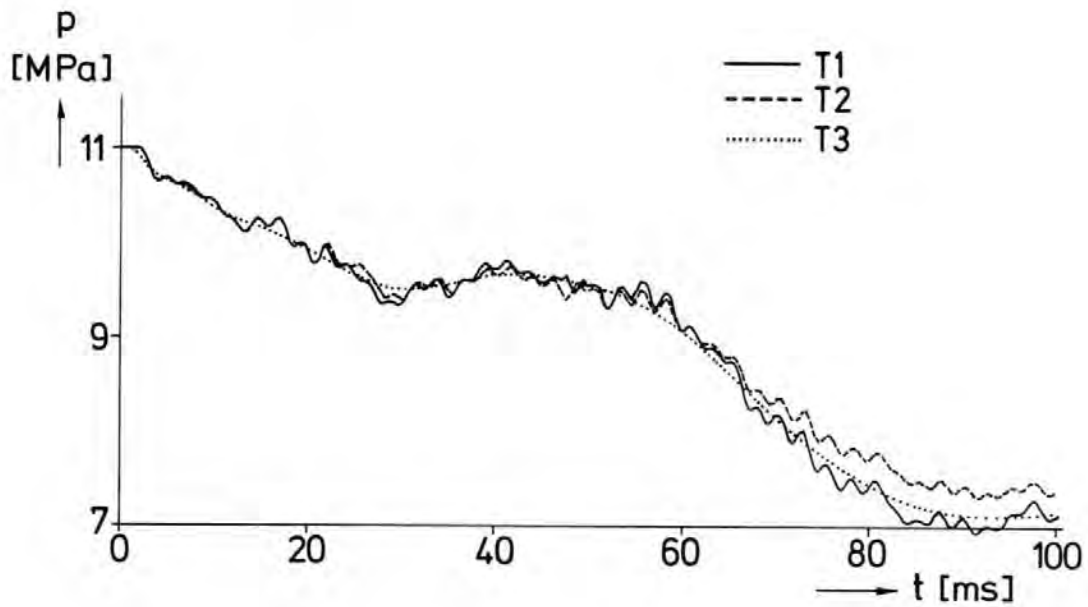
Fall T2: Newmark, mit physikalischer Dämpfung realistischer Größenordnung

Fall T3: ICE, ohne physikalische Dämpfung.

Abb. 6-20a-c zeigt die dafür berechneten Schalenverformungen  $w$  und Drücke  $p$  am Stutzen sowie die maximalen Spannungen. Bei den Wegen sind die Unterschiede anfänglich gering. Später macht sich die Dämpfung (Fälle T2 und T3) in geringeren Amplituden bemerkbar, wobei die numerische Dämpfung (T3) einen geringeren Effekt hat als die verwendete physikalische (T2). Bei den Drücken ist bezüglich der niederfrequenten Änderungen das gleiche Ergebnis festzustellen. Die bei T1 und T2 festzustellende hochfrequente Druckoszillation, die aus den hin- und herlaufenden Wellen im Bruchstutzen herrührt, wird dagegen in T3 durch die numerische Dämpfung sehr schnell dissipiert. Hier liefern Newmark- und ICE-Technik also stark unterschiedliche Ergebnisse. Nicht zu vernachlässigende Unterschiede ergeben sich auch bezüglich der Spannungen (Abb. 6-20c), zumindest für Zeiten  $> 40$  ms.



a) Verformung am Stutzen



b) Druck am Stutzen

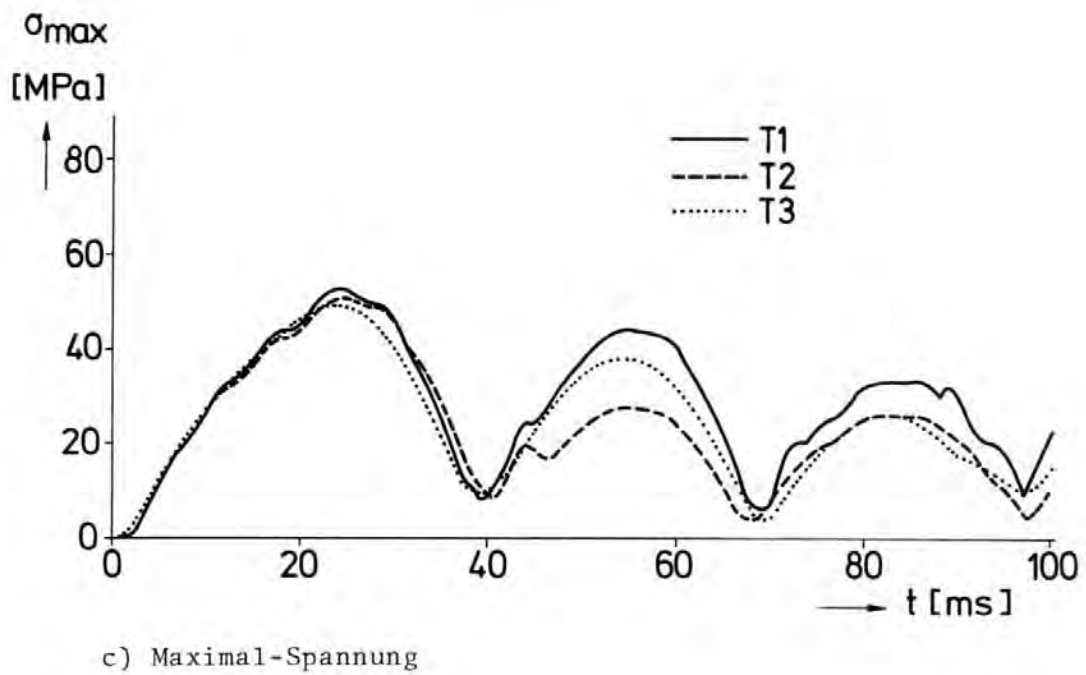


Abb. 6-20: Einfluß physikalischer und numerischer Dämpfung in FLUX2, HDR.

T1: ohne Dämpfung (Newmark)

T2: mit physikalischer Dämpfung (Newmark)

T3: mit numerischer Dämpfung (ICE)



Es wurde festgestellt, daß die numerische Dämpfung der ICE-Technik zuweilen Instabilitätsursachen infolge irgendwelcher Fehler wegdämpft, die dann erst bei Verkleinerung des Zeitschrittes durchschlagen. Das Newmark-Verfahren ist also "ehrlicher", indem es vorhandene Fehler früher deutlich werden läßt.

Aus diesen Gründen werden alle weiteren Rechnungen mit dem Newmark-Verfahren durchgeführt und zudem bei den HDR-Rechnungen zunächst auch physikalische Dämpfungseffekte vernachlässigt.

### 6.3.3 Einfluß der Diskretisierungsfehler

In Abb. 6-21 sind die mit verschiedenen Netzen (N1 - N3) bei sonst gleichen Bedingungen (HDR) berechneten Schalenverformungen  $w_R$  (am Ring),  $w_S$  (am Stutzen), Drucke  $p$  (am Stutzen) und maximalen Spannungen gegenübergestellt. Das generelle Konvergenzverhalten ist etwas schlechter als bei FLUX1. Vollständige Konvergenz ergibt sich eigentlich nur für die Ringverschiebung  $w_R$ , die graphisch bei N2 und N3 nicht mehr unterscheidbar ist. Bei allen anderen Größen, insbesondere den Drucken und Spannungen, ändern sich die Ergebnisse beim Übergang von Netz N2 nach N3 noch deutlich. Dies wird auch aus der Momentan-"Aufnahme" der Kernmantelverformung, Abb. 6-22, sichtbar, bei der für Netz N2 noch Knicke aufzutreten scheinen, die bei Netz N3 deutlich gerundet sind. Eigentlich folgt aus diesen Ergebnissen, daß alle weiteren Rechnungen zumindest mit Netz N3, wenn nicht mit einem noch weiter verfeinerten Netz, durchgeführt werden sollten. Aus Zeit- und Kostengründen (vergl. Tabelle 6) wird jedoch weiter das Netz N2 verwendet, bei dem eine Rechnung weniger als eine Stunde auf der IBM 370/168 dauert und also Parametervariationen noch praktikabel sind. (Nach Abschluß der vorliegenden Arbeit wurden Rechnungen mit noch feineren Netzen durchgeführt, die bestätigen, daß bei Netz N3 die Diskretisierungsfehler tatsächlich sehr gut vernachlässigt werden können.)



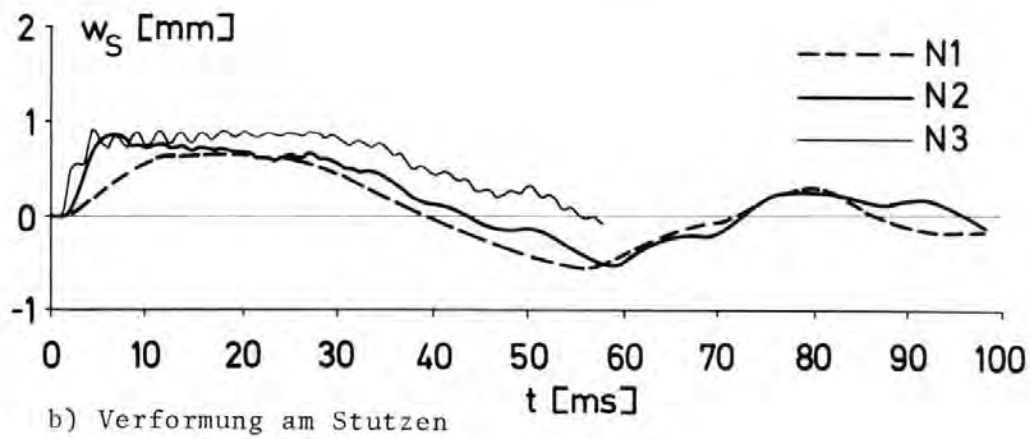
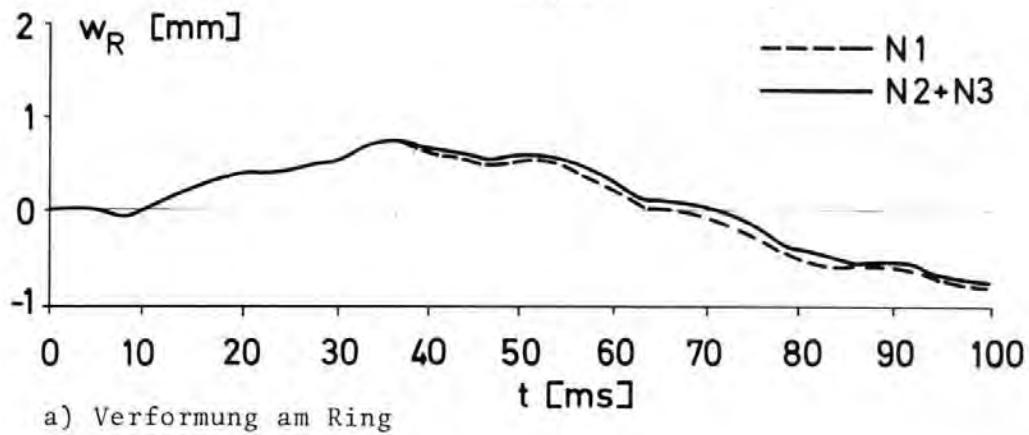
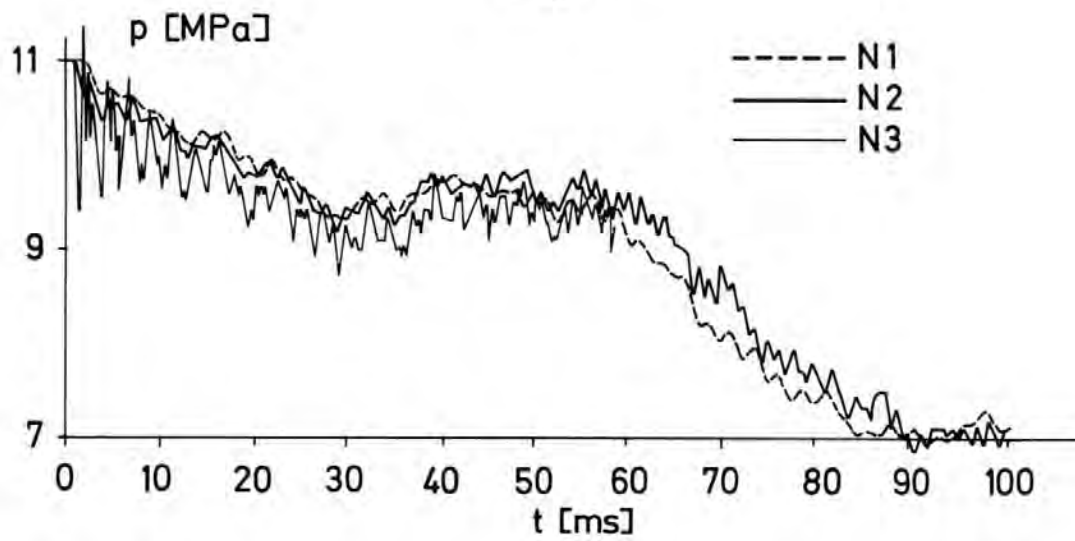
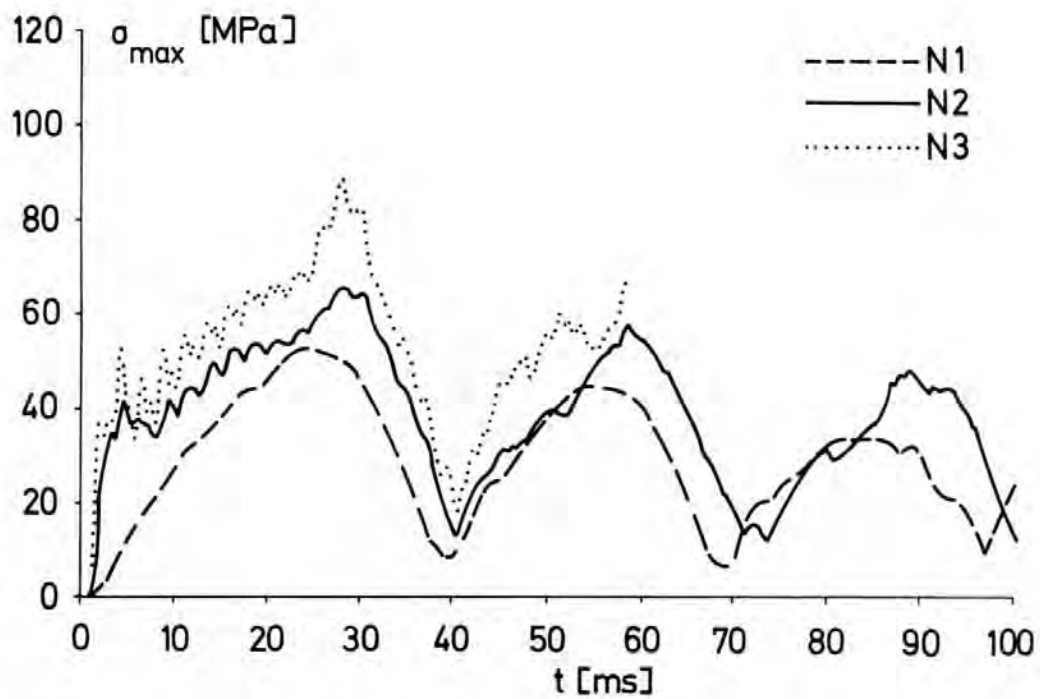


Abb. 6-21: Einfluß der Diskretisierung (Netze N1, N2 und N3 - im letzteren Fall nur bis  $t \approx 57$  ms) auf die mit FLUX2 berechneten radialen Kernmantel-Verformungen am Masse-Ring ( $w_R$ ) und am Stützen ( $w_S$ ) sowie den Druck ( $p$ ) in Stützen-Nähe und die maximale Spannung ( $\sigma_{max}$ ), siehe nächstes Blatt (Fälle H1, H2, H3).



c) Druck im Ringraum am Stutzen



d) Maximal-Spannung

(siehe vorhergehendes Blatt)

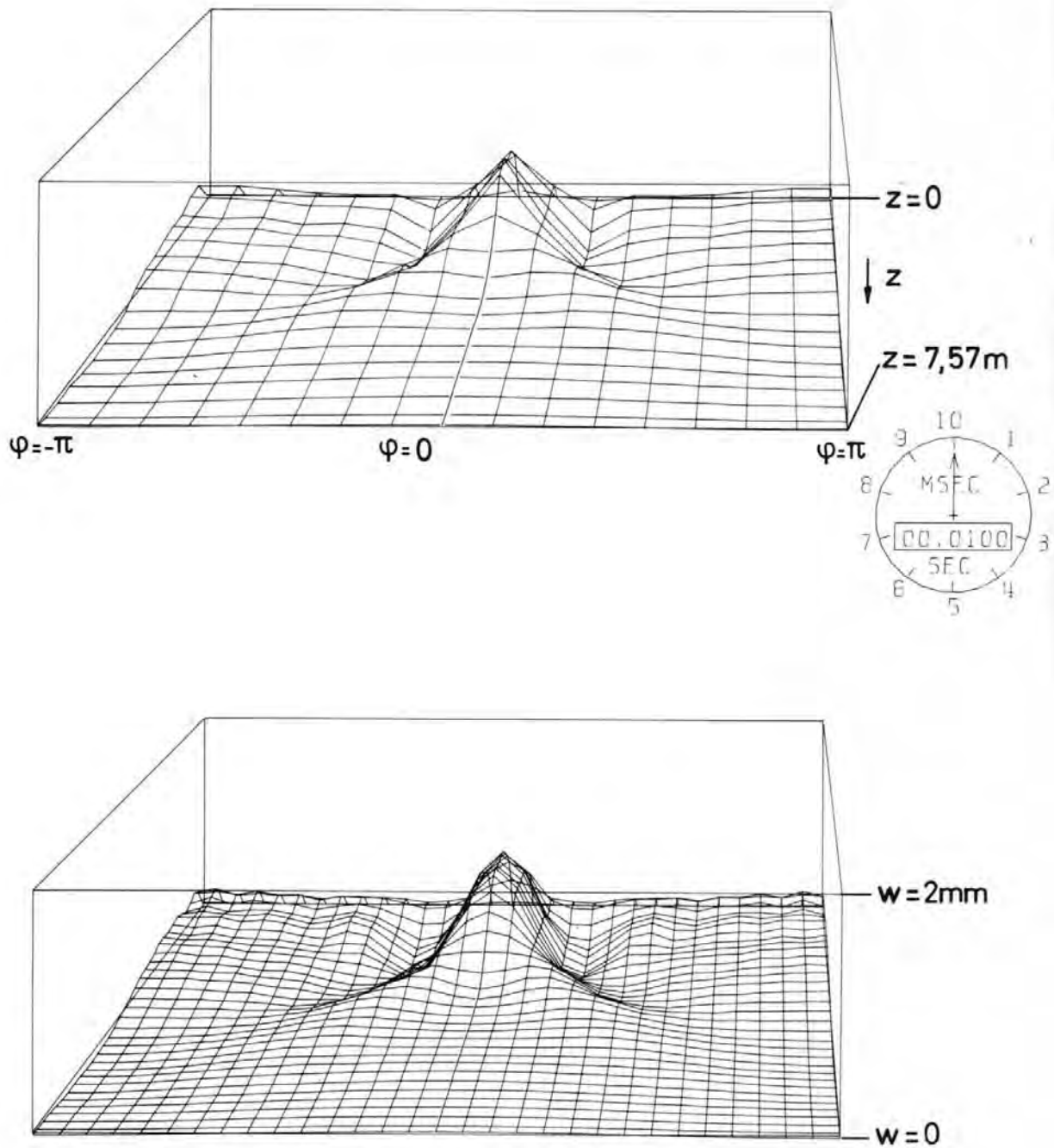


Abb. 6-22: Diskretisierungseinfluß auf die radiale Schalenverformung, Vergleich der Fälle H2 und H3 für  $t = 10\text{ ms}$ .

#### 6.3.4 Vergleich gekoppelter, entkoppelt dynamischer und entkoppelt quasistatischer Rechnungen

Wohl eine der interessantesten Fragen ist die nach der quantitativen Auswirkung der Fluid-Struktur-Rückkoppelung auf die Strukturbelastungen. Eine Gegenüberstellung der Fälle

H2: mit Rückkoppelung

HE: ohne Rückkoppelung (entkoppelt)

in den Abb. 6-23, -24 und -25 liefert hier die erforderlichen Informationen:

Mit Strukturrückwirkungen im Gegensatz zum Fall ohne Rückwirkung

- fällt der Druck  $p$  in Stutzennähe langsamer ab.
- ist das Druckspektrum bei den hohen Frequenzen, vor allem in den ersten 50 ms, schwächer ausgeprägt; in dieser Zeit wird Energie an die Struktur abgegeben.
- sinkt der Druck im Innenraum schon sehr viel früher (ca. 2 ms) um ca. 1 - 2 bar ab, während er ohne Rückwirkung erst nach ca. 15 ms abzusinken beginnt.
- sind die maximalen Verformungen etwa 50 % kleiner.
- ist der Bewegungsablauf deutlich verlangsamt und hochfrequente Schwingungen weniger stark angeregt.
- sind die Spannungen wesentlich (anfangs um den Faktor 2 - 3) kleiner.

Insbesondere Abb. 6-25 zeigt die Unbrauchbarkeit der entkoppelten Rechnung: In diesem Fall wirkt die Struktur wie ein mit quasi-periodischen Kräften angeregter Schwinger. Die Reaktion der Struktur hängt dann wesentlich von der Strukturdämpfung ab. Ohne Dämpfung nehmen die Amplituden der Schwingungen ständig zu. Die Geschwindigkeit der Amplitudenzunahme hängt von der Differenz zwischen den Anregungs- und Eigenfrequenzen ab.

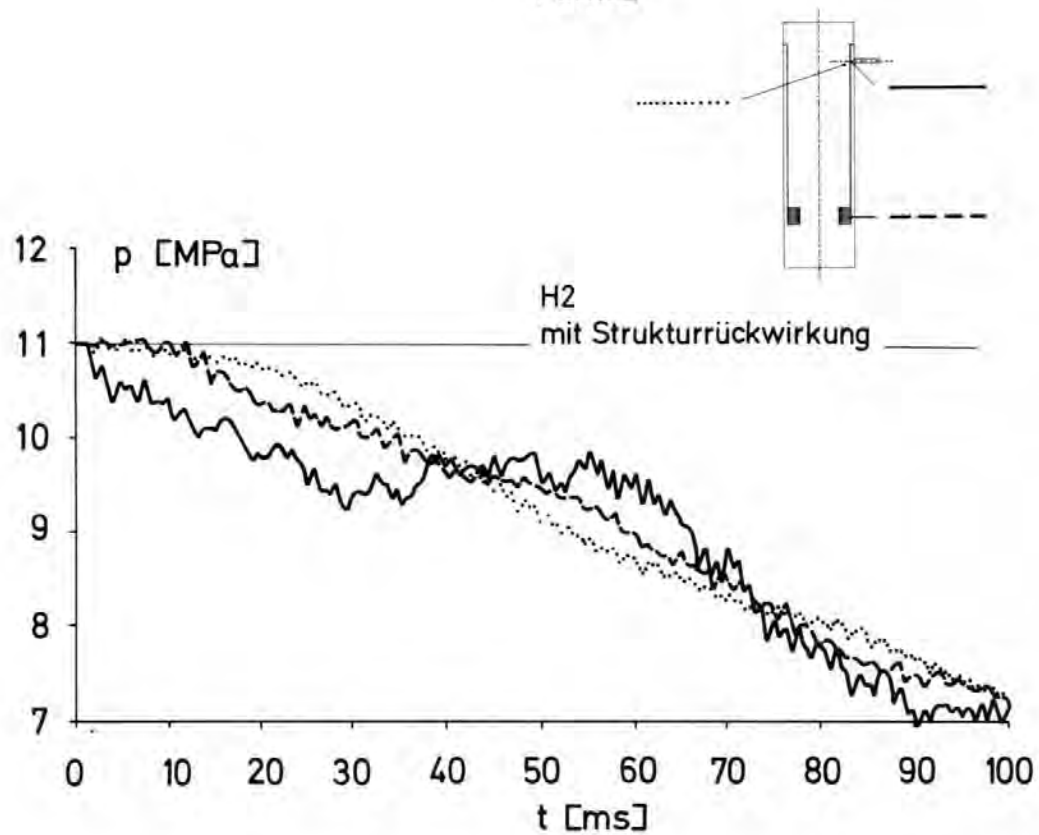
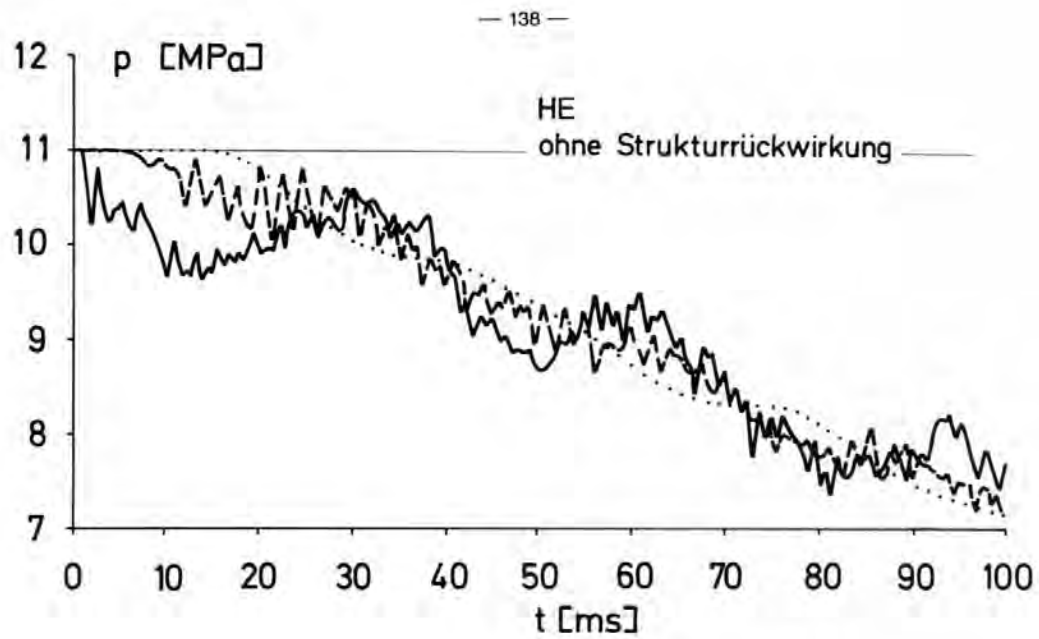


Abb. 6-23: Drucke als Funktion der Zeit  $t$  ohne (HE) und mit (H2) Strukturrückwirkung im Ringraum in der Nähe des Stützens und am Massering sowie im Innenraum in der Nähe des Stützens.

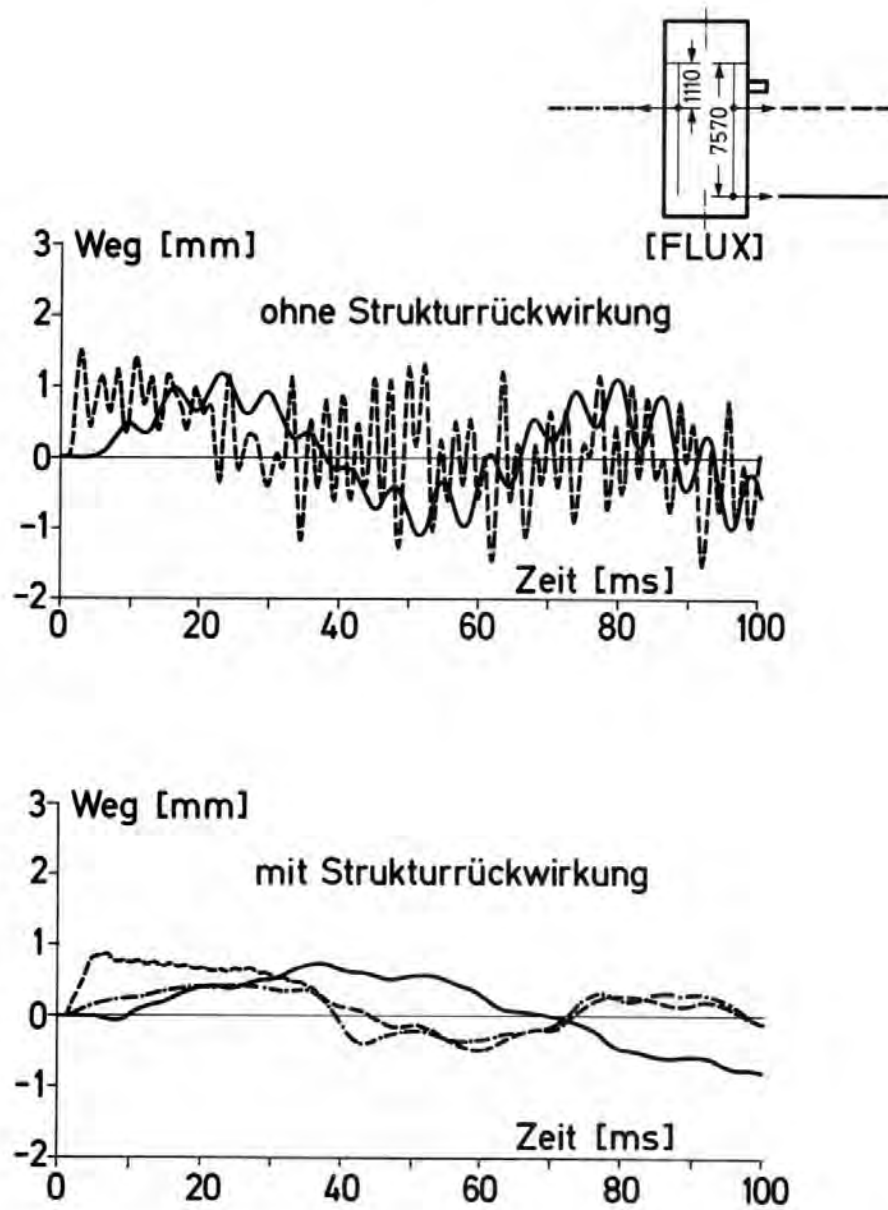


Abb. 6-24: Radiale HDR-Kernmantel-Verformung als Funktion der Zeit, ohne und mit Strukturrückwirkung, Fälle HE und H2.

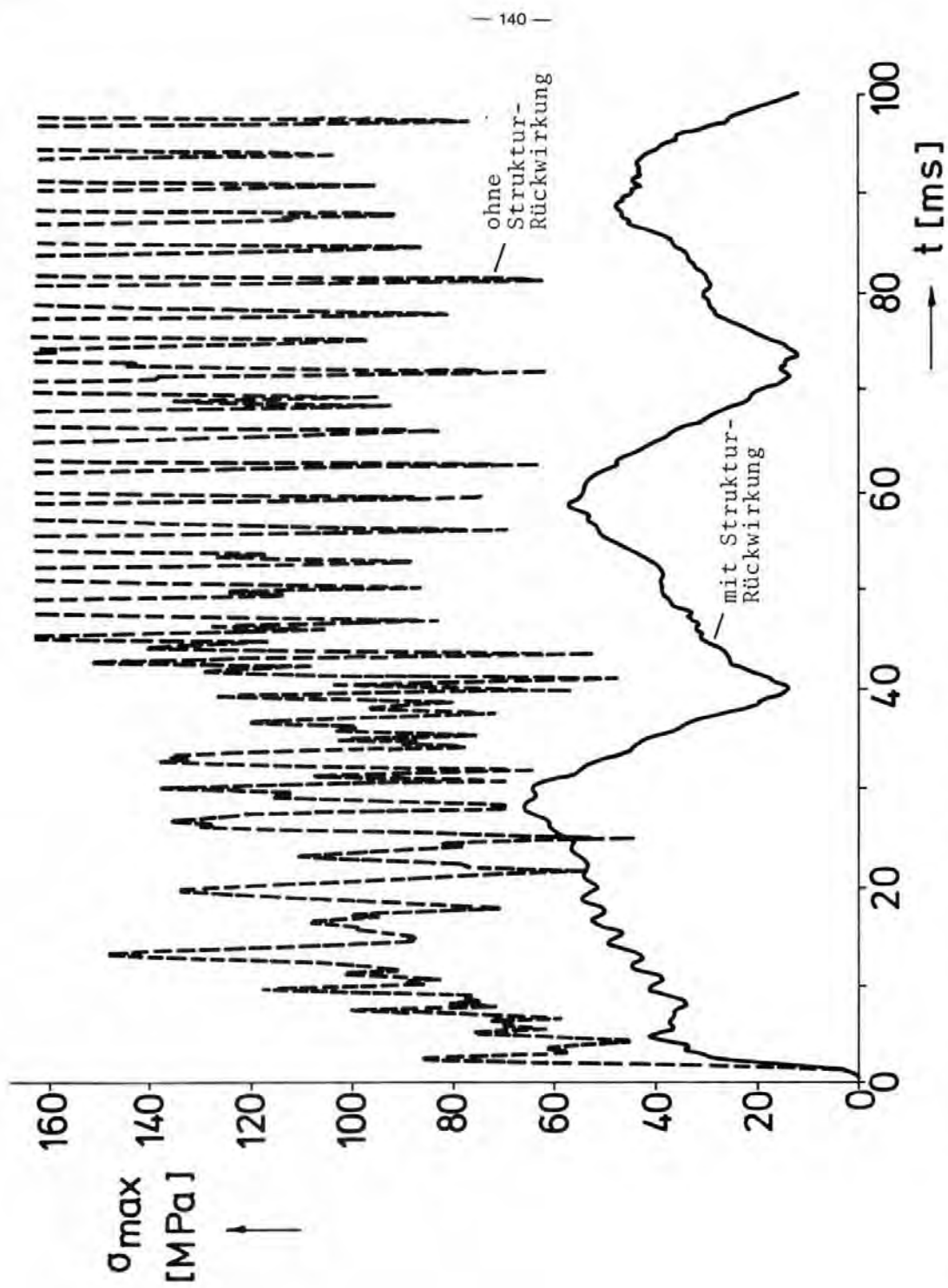


Abb. 6-25: Maximale Spannung als Funktion der Zeit ohne und mit Strukturrückwirkung (H<sub>2</sub>, Netz N2). Werte oberhalb 160 MPa sind abgeschnitten.

Bei Gleichheit dieser Frequenzen liegt Resonanz vor. Eine derartige Rechnung liefert daher bestenfalls eine obere Grenze für die Maximalspannungen.

Zulässig im Sinne endlicher Lösungen für beliebige Anregungen ist die quasistatische Approximation gemäß Fall HS. Allerdings liefert diese Rechnung (die aus Kostengründen nur bis  $t \approx 20$  ms durchgeführt wurde) wesentlich größere Spannungen (vergl. Abb. 6-26), während eine quasistatische Rechnung in FLUX1 zu kleine Spannungen lieferte.

Die Berücksichtigung der virtuellen Massen lieferte im inkompressiblen Fall eine recht gute Näherung. Es stellt sich daher die Frage, ob eine entkoppelte Rechnung, bei der das Druckfeld für kompressibles Fluid und starre Struktur, die Strukturreaktion aber unter Einschluß der virtuellen Fluid-Massen gemäß inkompressibler Analysen berechnet wird, nicht eine noch bessere Näherung darstellt. Eine derartige Rechnung wurde mit FLUX2 durchgeführt (Fall HV), wobei die mit FLUX1 ermittelten virtuellen Massen in der sonst entkoppelten Rechnung benutzt werden. Aus dem Ergebnis nach Abb. 6-26 ist abzulesen, daß diese Näherung zu schlechteren Ergebnissen als das vollständig inkompressible Modell führt. Die Ursache liegt vermutlich in den hochfrequenten Drucklasten bei kompressibler Rechnung.

Diese Vergleiche zeigen die Wichtigkeit der gekoppelten Analyse entsprechend Fall H2.

Als Ergänzung zur Diskussion der Spannungsberechnung ist in Abb. 6-27 der axiale und azimutale Ort des Spannungsmaximums aufgetragen. Das absolute Spannungsmaximum wird demnach zur Zeit  $t_{\max} \approx 30$  ms in der Nähe des Stutzens erreicht.

Bezüglich der Ausströmgeschwindigkeit  $v$  des Fluids aus dem Stutzen, Abb. 6-28, ist der Einfluß der Fluid-Struktur-Koppelung von untergeordneter Bedeutung.



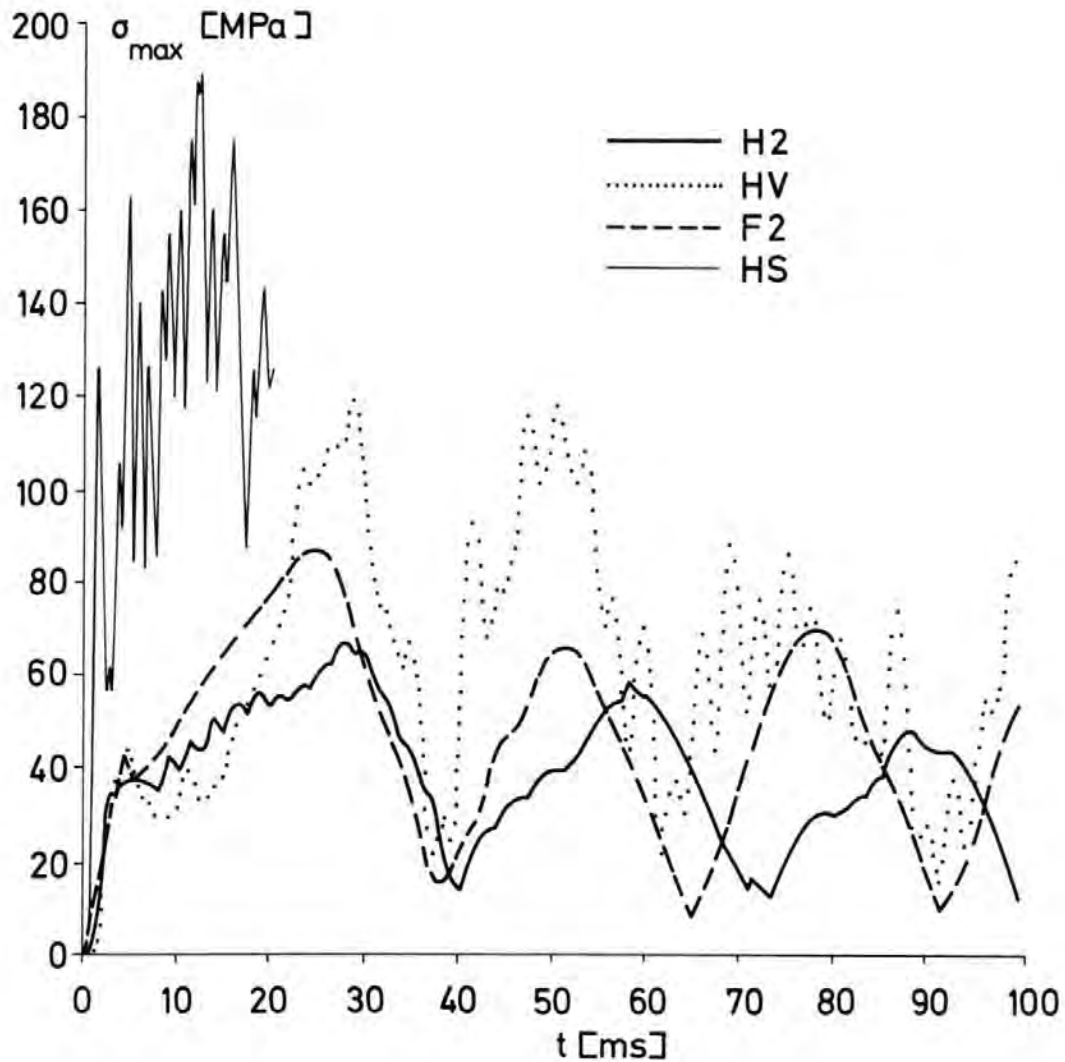


Abb. 6-26: Einfluß verschiedener Koppelungsverfahren auf die maximale Spannung im Kernmantel als Funktion der Zeit  $t$  für Netz N2.

- H2: kompressibel, mit Rückwirkung
- HV: kompressibel, ohne Rückwirkung, aber mit virtueller Fluid-Masse
- F2: inkompressibel, mit virtueller Fluid-Masse
- HS: kompressibel, quasistatische Struktur

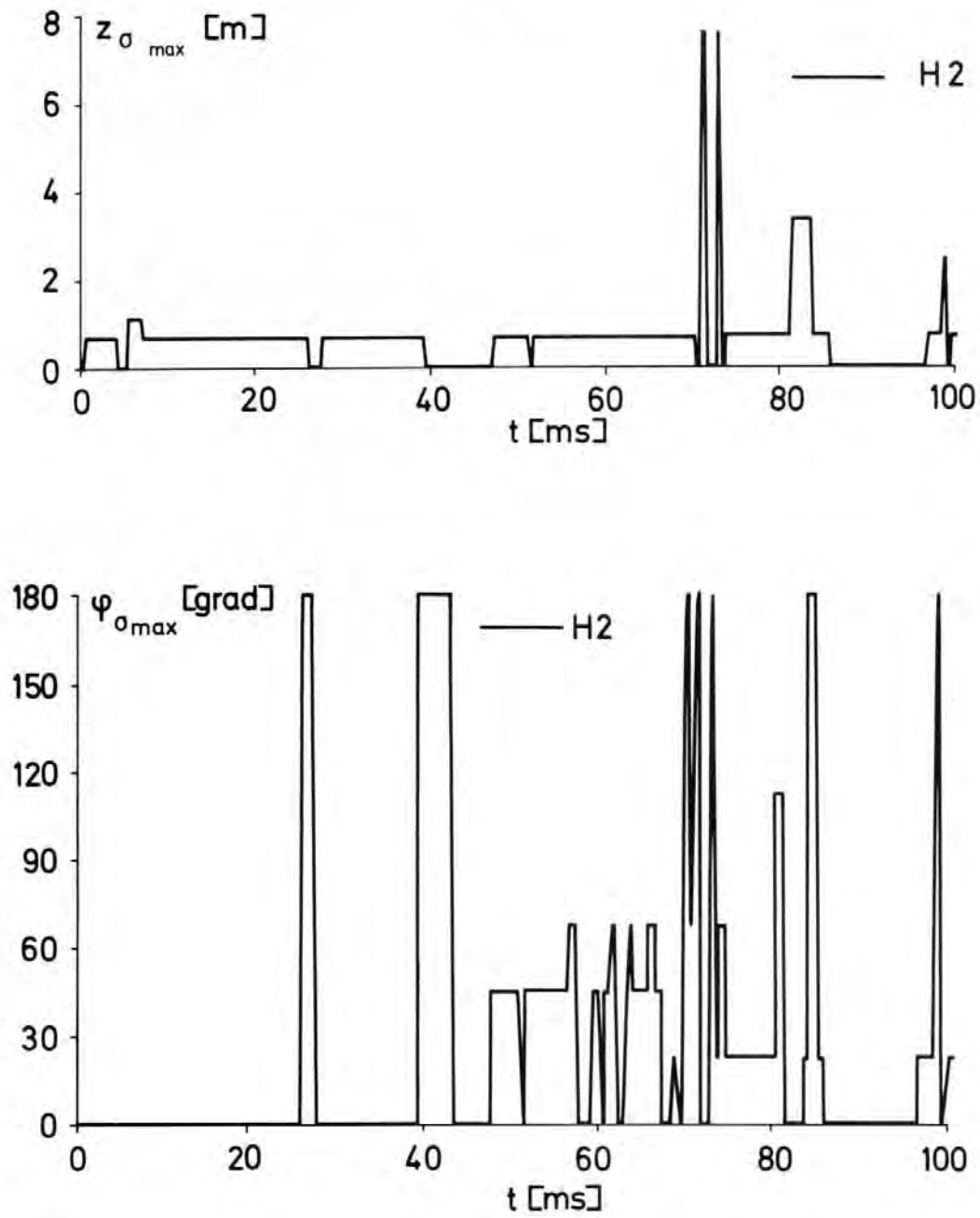


Abb. 6-27: Orte ( $z_{\sigma_{max}}$ ,  $\varphi_{\sigma_{max}}$ ) der maximalen Spannung als Funktion der Zeit  $t$ , Fall H2.

### 6.3.5 Einfluß der spezifischen kinetischen Energie

Wie in § 1.2.2.3 erläutert, führt das Anwachsen der spezifischen kinetischen Energie  $E$  der Strömung am Kernmantel in Stutzen-nähe zu einer "Erholung" des Druckniveaus und damit zu verringerten Lasten. Darüber hinaus begrenzt die ursprünglich vorhandene potentielle Energie die maximal erreichbare kinetische Energie und damit die erreichbaren Ausströmgeschwindigkeiten.

Die Auswirkung dieses Effektes (u.a.) auf die Ausströmgeschwindigkeit  $v$  an der Bruchstelle und den Druck  $p$  im Ringraum in Stutzennähe zeigen Abb. 6-28 und 6-29. Während die Geschwindigkeit im Falle der nichtlinear berechneten kompressiblen Strömung H2 (sowie auch für den inkompressiblen Fall F2) allmählich einem Maximum zustrebt, wächst sie bei Vernachlässigung der kinetischen Energie wie im Fall HL etwa linear an. Während der Druck im Falle H2 (nichtlinear) deutlich nach  $t \approx 30$  ms für eine gewisse Zeit (bis der Druck im Innenraum absinkt) ansteigt, fehlt dieser Anstieg im linearen Fall HL.

Eine Linearisierung hinsichtlich der kinetischen Energie bewirkt also große quantitative und qualitative Fehler.

### 6.3.6 Vergleich kompressible/inkompressible Rechnung

In Ergänzung zu den Ergebnissen des § 6.2.4 stellen wir für die Ausströmgeschwindigkeit  $v$  und den Druck im Ringraum anhand von Abb. 6-28 und 6-29 die relativ gute Übereinstimmung zwischen den kompressiblen Fällen H2 und insbesondere HE und dem mit FLUX1 berechneten Fall F2 fest. Die Übereinstimmung wird schlecht ab  $t \gtrsim 35$  ms, wenn der Druck im Innenraum deutlich absinkt. Dann ist die in FLUX1 am oberen Deckel verwendete Randbedingung  $p = p_0 = \text{const}$  nicht mehr sinnvoll.

### 6.3.7 Einfluß der Rohrlänge

Neben dem HDR-Bezugsfall mit einem Rohr der Länge  $L_S = 1,1$  m wurden Fälle HK ( $L_S = 0,15$  m) und HG ( $L_S = 5,43$  m) berechnet. Abb. 6-28, 6-29 und 6-30 zeigt die Auswirkung der unterschiedlichen Rohrlängen.

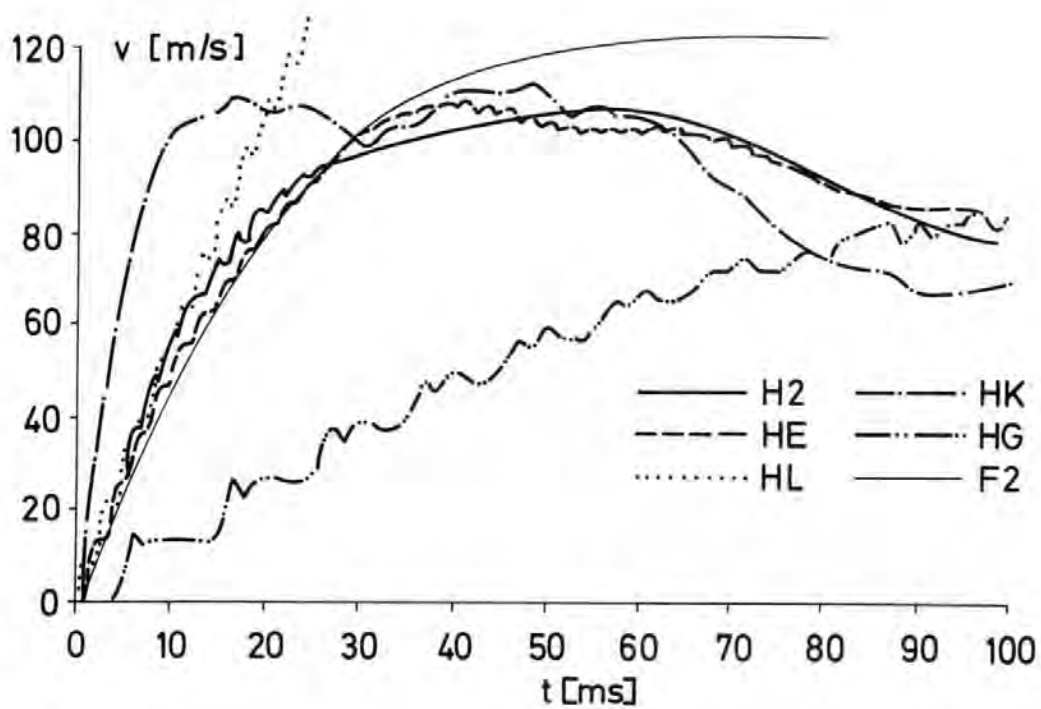


Abb. 6-28: Einfluß verschiedener Modelle und Rohrlängen auf die Geschwindigkeit  $v(t)$  am Eintritt in das Blowdown-Rohr.

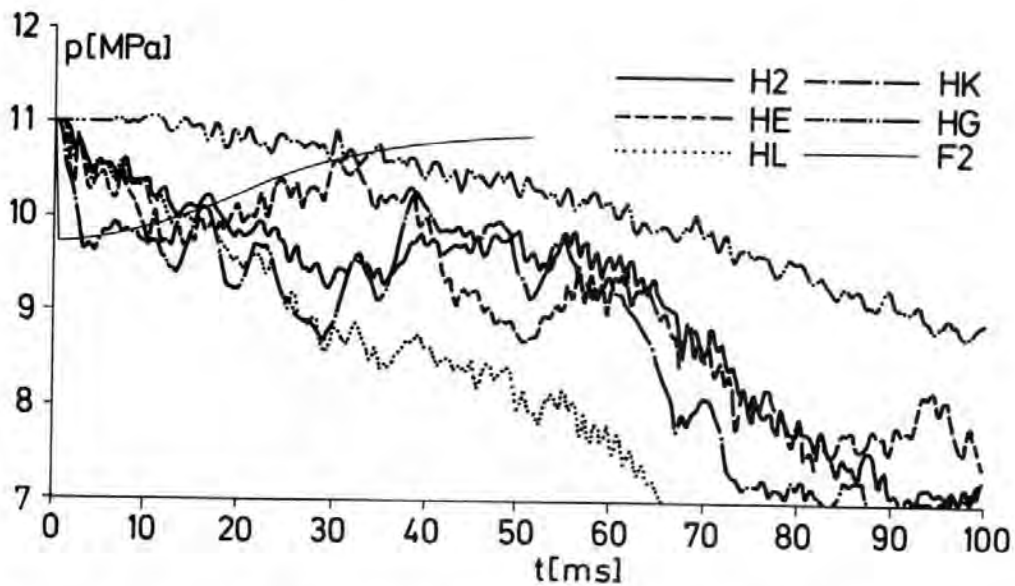


Abb. 6-29: Einfluß verschiedener Modelle und Rohrlängen auf den Druck  $p(t)$  im Ringraum in Stutzen-Nähe.

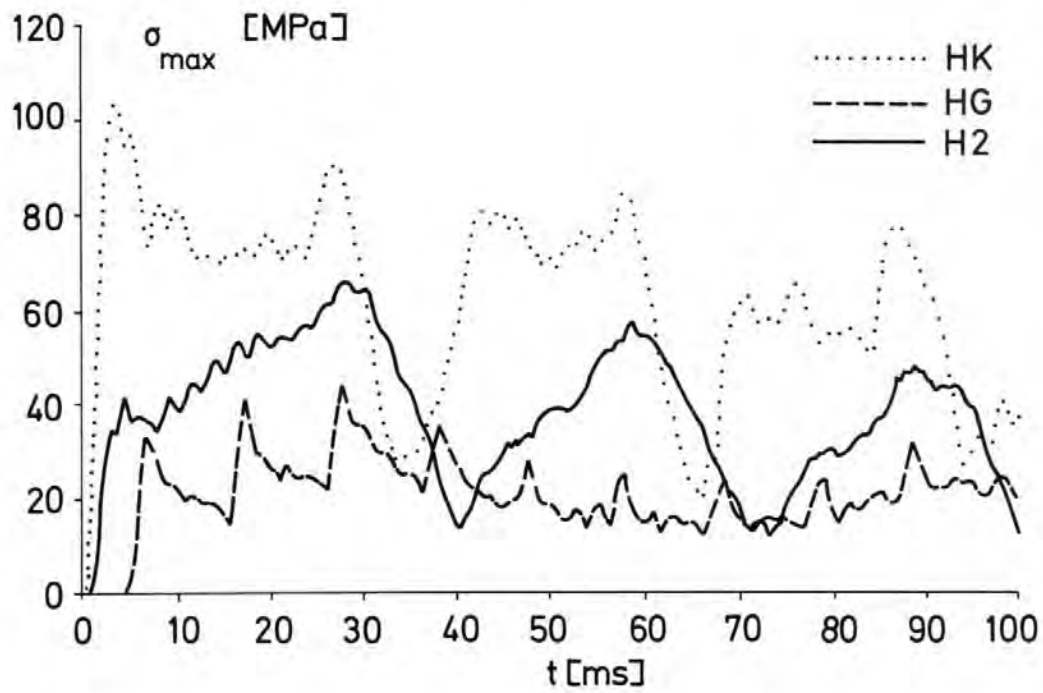


Abb. 6-30: Einfluß verschiedener Rohr-Längen  $L_S$  auf die Maximal-Spannung. HK:  $L_S = 0,15\text{ m}$ , H2:  $L_S = 1,1\text{ m}$ , HG:  $L_S = 5,43\text{ m}$ .

Das Geschwindigkeits-Ergebnis zeigt die verkleinerte effektive Trägheit des Systems mit kurzem Rohr. Darüber hinaus wird die Frequenz der "akustischen" Schwingung  $\alpha/(2L_s)$  offensichtlich. Bei dem langen Rohr ändert sich der Druck im Ringraum erst nach etwa 6 ms, also nach der Laufzeit der Entlastungswelle durch das Rohr.

Am deutlichsten ist die Auswirkung der Rohrlänge an den Spannungen, Abb. 6-30, abzulesen. Die maximalen Spannungen sind um so kleiner, je länger das Rohr des Bruchstutzens ist.

#### 6.3.8 Einfluß der Bruchöffnungszeit und Dämpfung

Der bisher diskutierte Bezugsfall H2 berücksichtigt weder Dämpfung noch eine endliche Bruchöffnungszeit  $\Delta t_{\text{Bruch}}$ . Um den Einfluß dieser Parameter zu studieren, werden in Abb. 6-31 Ergebnisse von H2 dem Fall HD mit einer Bruchöffnungszeit von 1 ms und Dämpfung infolge Struktur- und Fluidreibung gegenübergestellt. Die Dämpfungsparameter  $\zeta_{\text{damp}}$  der Struktur gemäß (A4-10) wurden dabei recht willkürlich zu 1 % angenommen. Der Parameter  $f_{\text{damp}}$  der Fluidreibung gemäß § A1.4, der bei stationärer einphasiger Strömung etwa den Wert 0,01 haben sollte, wird zwecks Berücksichtigung erhöhter Reibung durch das nicht ausgebildete Geschwindigkeitsprofil und Zweiphasenströmung auf 0,05 festgelegt.

Die in Abb. 6-31 dargestellten Ergebnisse zeigen

- eine unwesentliche zeitliche Verzögerung infolge der endlichen Bruchöffnungszeit.
- deutlich verringerte Ausströmgeschwindigkeiten und Spannungen infolge Dämpfung nach ca. 30 ms.
- Dissipation der akustischen Oszillation im Bruchstutzen, die sich durch die 495 Hz-Schwingung in der Schalenverformung ausdrückt.
- eine gewisse Verlangsamung der Vorgänge durch die Reibung.

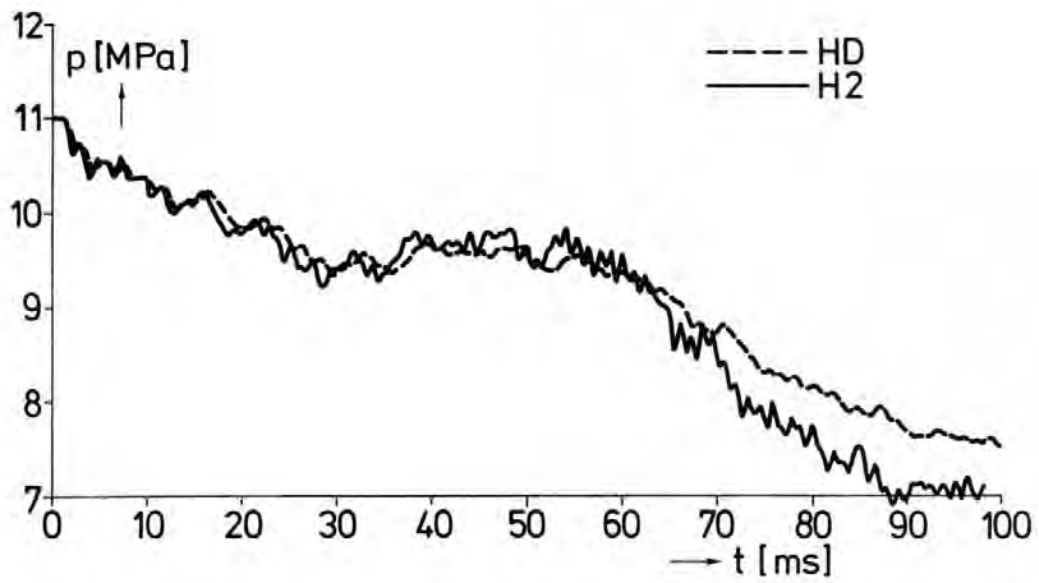


Abb. 6-31a: Einfluß der Bruchöffnungszeit und Dämpfung auf den Druck  $p(t)$  im Ringraum nahe am Stützen. (HD mit, H2 ohne Dämpfung)

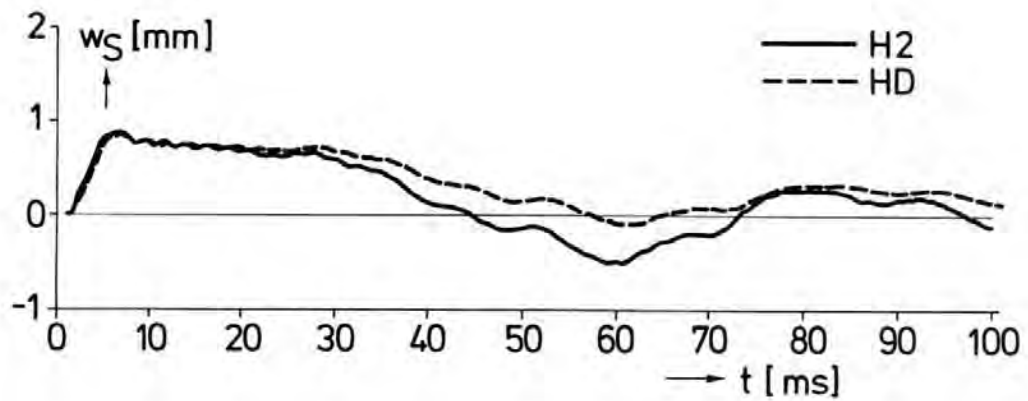


Abb. 6-31b: Dito für die Verformung  $w_s(t)$  in Stützennähe

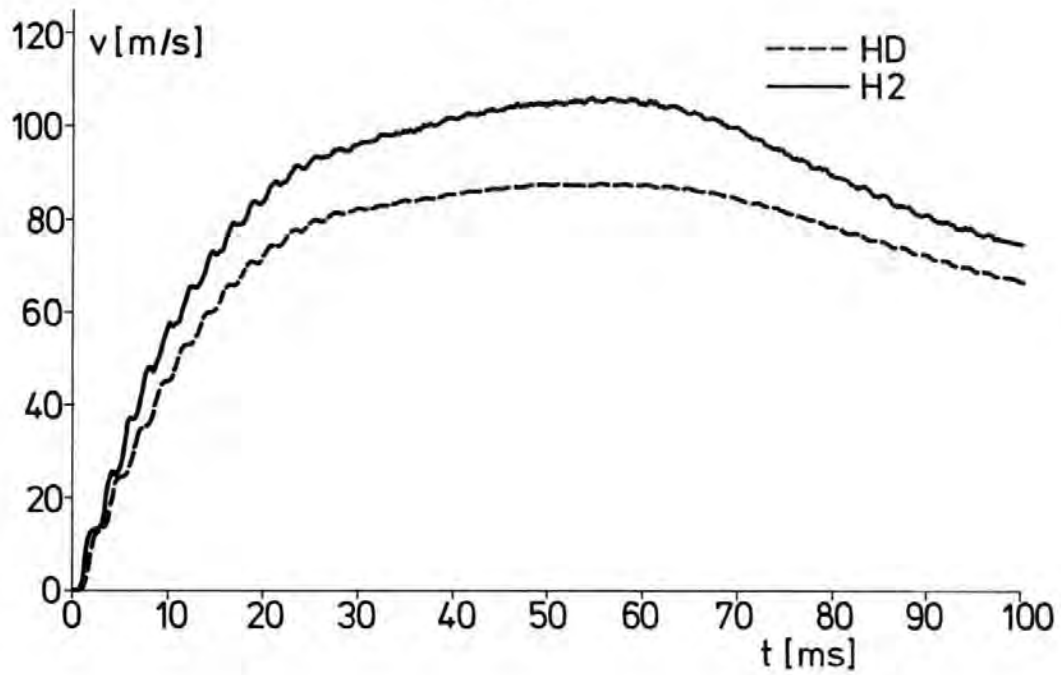


Abb. 6-31c: Dito für die Ausströmgeschwindigkeit  $v(t)$  am Eintritt in das Rohr

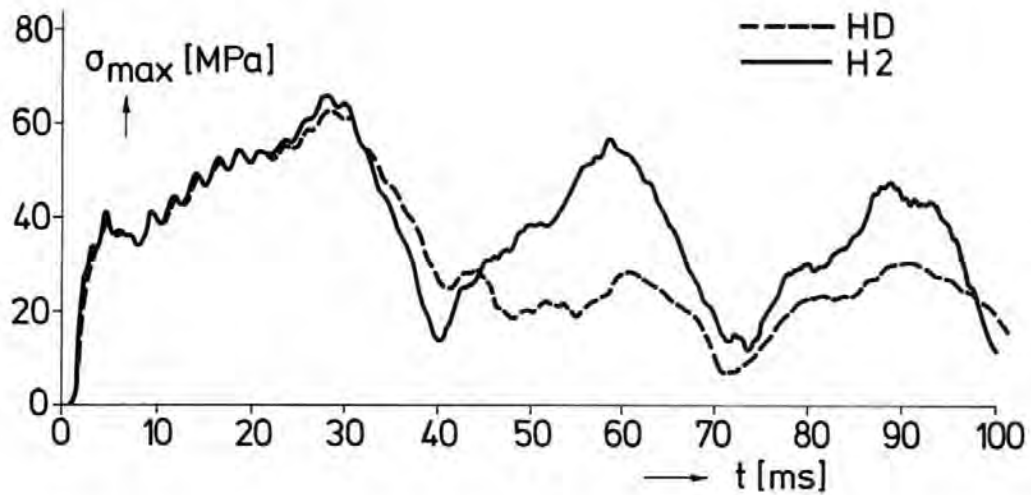


Abb. 6-31d: Dito für die maximale Spannung im Kernmantel.



## 6.4 Nachrechnung des RS16-Experiments

### 6.4.1 Qualitative Beschreibung

Abb. 6-32 zeigt eine Folge von Druckfeldern mit zunehmender Druckentlastung. Anhand dieses Bildes wird die im Vergleich zum HDR und erst recht zum DWR schlanke Form des Druckbehälters deutlich. Aus diesem Grunde werden hier bei gleicher Diskretisierung am Umfang doppelt so viele Maschen in axialer Richtung verwendet. Eine weitere Besonderheit des RS16-Experiments ist das Vorhandensein eines "Bypass" an der oberen Kernmanteleinspannung. Der Anteil der Bypass-Querschnittsfläche am Ringraumquerschnitt beträgt zwar nur 3,9 %, jedoch ist dieser Querschnitt groß genug, um das Druckfeld im oberen Plenum unmittelbar zu beeinflussen, wie Abb. 6-32 zeigt. Die Art der Modellierung des Kernmantels wurde in § 6.1.2 erläutert. Der resultierende Bewegungsablauf ist in Abb. 6-33 erkennbar. Besonders deutlich wird die lokale Schalenverformung am Stutzen. In Abb. 6-32 ist für  $t = 2 \text{ ms}$  die Auswirkung dieser Schalenverformung auf das Druckfeld im Innenraum sichtbar. Gleichzeitig mit der positiven lokalen Verformung der Schale zum Stutzen hin bewegt sich der untere (als starr modellierte) Teil des Kernmantels zunächst vom Stutzen weg. Dies ist eine Folge der im Vergleich zum Balken-Biege-Mode weniger trägen Kipp-Schwingung des starren Teils. Der Balken-Biege-Mode hat eine extrem niedrige Eigenfrequenz von ca. 4 Hz im Wasser, die Kipp-Schwingungs-Eigenfrequenz beträgt 44,2 Hz (vergl. Abb. 6-7).

Die charakteristische Beschleunigungszeit  $\tau$  ist aufgrund des kurzen Bruchstutzens von  $L_S = 0,35 \text{ m}$  Länge etwa um den Faktor zwei kleiner als beim HDR, siehe Tabelle 4. Weiterhin sinkt der Druck im Innenraum wegen des relativ kleinen Volumens schneller ab (vergleiche Kennzahl  $\pi_4$  gemäß Anhang 7). Aus diesen Gründen genügt hier die Betrachtung kürzerer Zeiträume zur Beurteilung der Vorgänge.

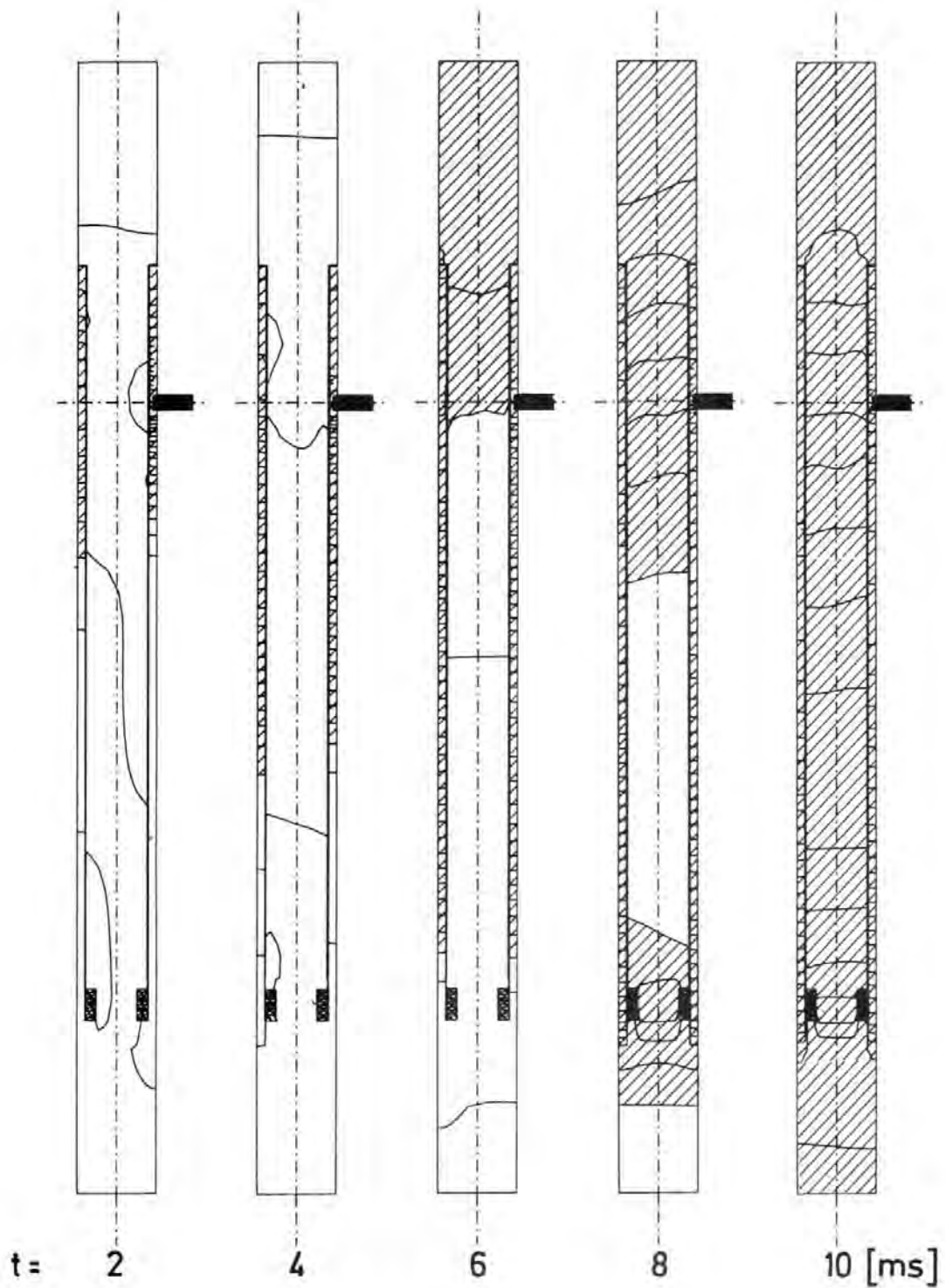


Abb. 6-32: Druckwellen-Ausbreitung im RS16-Behälter mit Struktur-Rückwirkung. Höhenlinien-Differenz,  $\Delta p = 1$  bar. Schraffiert sind Bereiche mit einer Druckabsenkung von mehr als 2 bar. Fall R2.

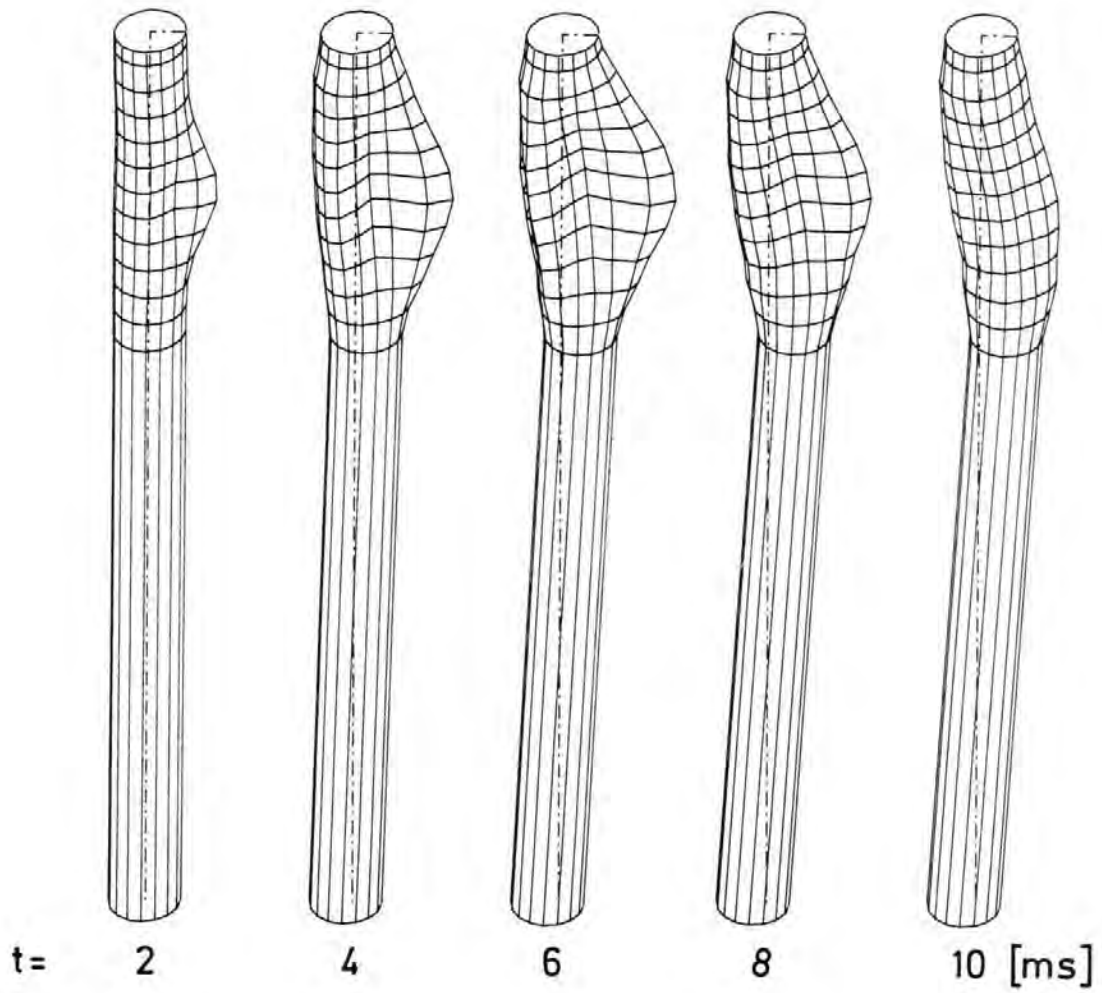


Abb. 6-33: Schalen-Verformung des RS16-Kernmantels (300fach vergrößert) mit Struktur-Rückwirkung auf das Fluid, Fall R2.

#### 6.4.2 Drucke

In den Abbildungen 6-34 bis -37 sind die gerechneten FLUX2-Ergebnisse (dicke Kurven) mit den Meßwerten für verschiedene Druckmeßstellen (dünne Kurven) verglichen. Die Meßstellenbezeichnungen entsprechen den Definitionen in  $\angle^2_7$ . Bezüglich der Meßwerte sind die Abbildungen Kopien der Abb. 5, 8, 10 und 11 in  $\angle^2_7$ .

In Abb. 6-34 ist der Druckverlauf im Bruchstutzen und an der Mündungsstelle des Stutzens am Kernmantel dargestellt. Die Meßstelle 94 zeigt anfänglich einen Druckanstieg, der aus dem Verhalten der Bruchmembran folgt  $\angle^2_7$  und der in den Rechnungen nicht erfaßt ist. Während in FLUX2 der Druck im Stutzen im wesentlichen auf den als Randbedingung vorgegebenen Sattedampfdruck abfällt, zeigt das Meßsignal 99 ein anfängliches Unterschwingen, das auf Nichtgleichgewichts-Zweiphaseneffekte zurückgeführt werden kann. Dieser Effekt ist aber für den weiteren Verlauf offenbar nicht wesentlich.

Die Druckwellenausbreitung axial im Ringraum zeigt Abb. 6-35. Die theoretischen Wellenlaufzeiten, wie sie aufgrund des Abstandes von der Bruchstelle und der Schallgeschwindigkeit ( $a = 1070$  m/s) des Fluids sich ergeben, werden von der Rechnung präzise wiedergegeben. Die quantitative Übereinstimmung zwischen Rechnung und Messung für die Meßstellen 83 und 90 kann kaum besser sein.

Abb. 6-36 erfaßt einen längeren Zeitraum. Der Vergleich der Ergebnisse für die Meßstelle 105 zeigt, daß die Druckentlastung über den Bypass auch quantitativ gut erfaßt wird. Ein gewisser Unterschied ist hinsichtlich der Meßstelle 90 für  $t \approx 10$  ms erkennbar, der bisher nicht erklärt werden kann. Die Abweichungen für Zeiten  $> 40$  ms beruhen zum Teil auf dem spätestens dann auftretenden Aufsieden des Wassers, das in FLUX nicht erfaßt werden kann.

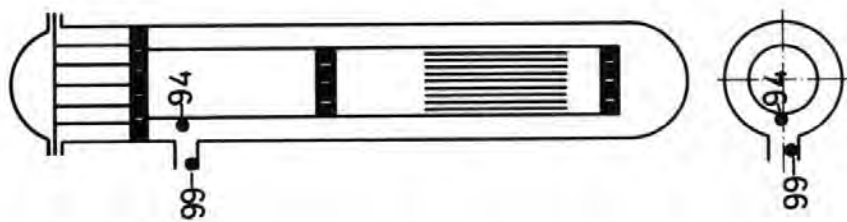
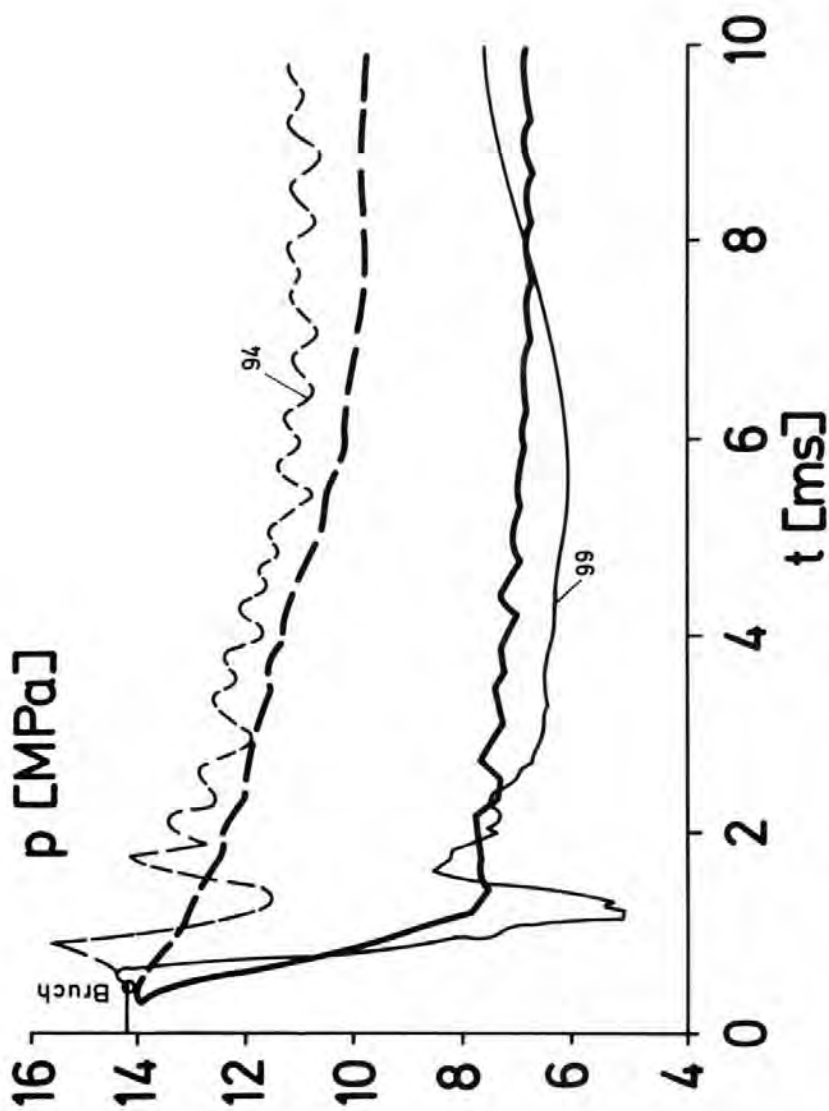


Abb. 6-34: Druckverlauf in der Nähe der Bruchstelle im RS16-Experiment.  
Dünne Kurven: Messung, dicke Kurven: FLUX2-Rechnung, Fall R2.

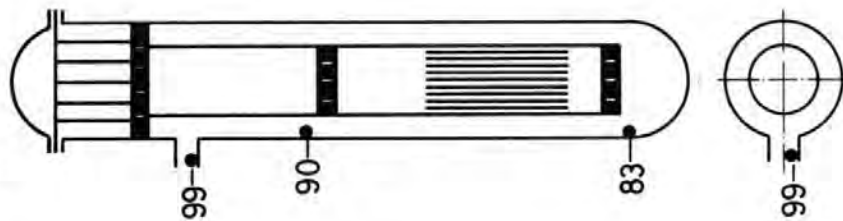
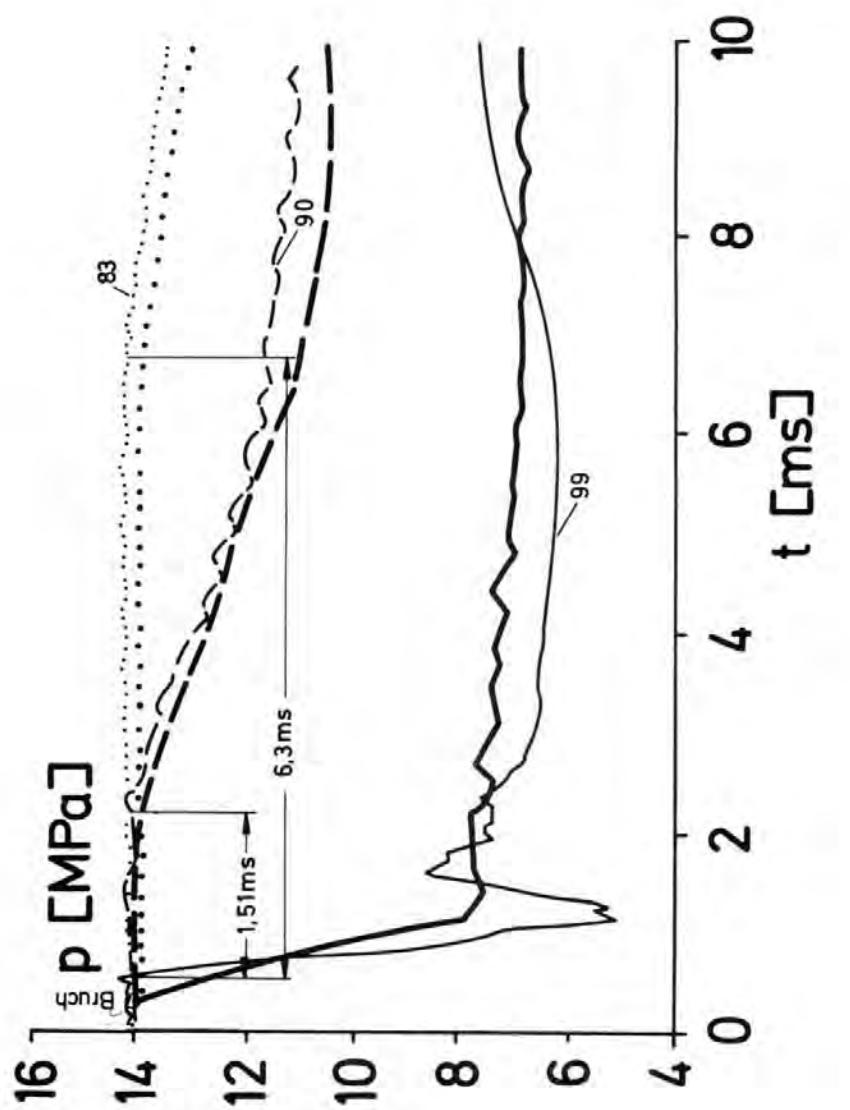
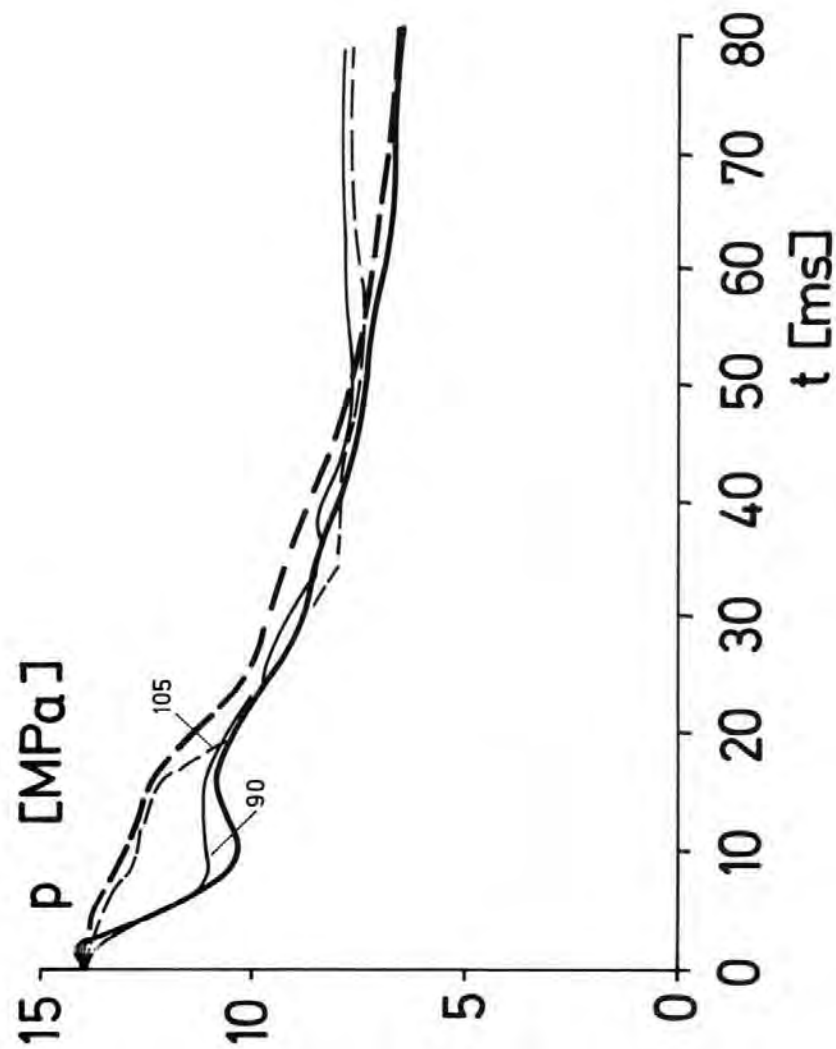


Abb. 6-35: Ausbreitung der Entlastungswelle in den RS16-Ringraum mit Angabe der Laufzeiten.  
Dünne Kurven: Experiment, dicke Kurven: Rechnung, Fall R2.



RS16/DWR5

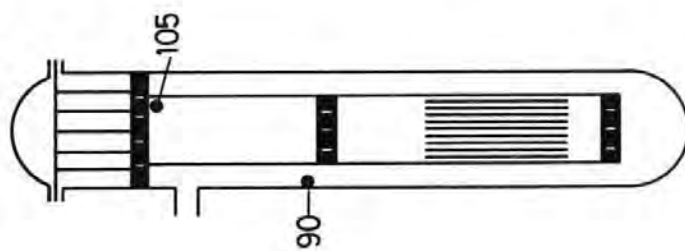


Abb. 6-36: Druckentlastung an verschiedenen Stellen im RS16-Behälter.  
Dünne Kurven: Messung, dicke Kurven: Rechnung, Fall R2.

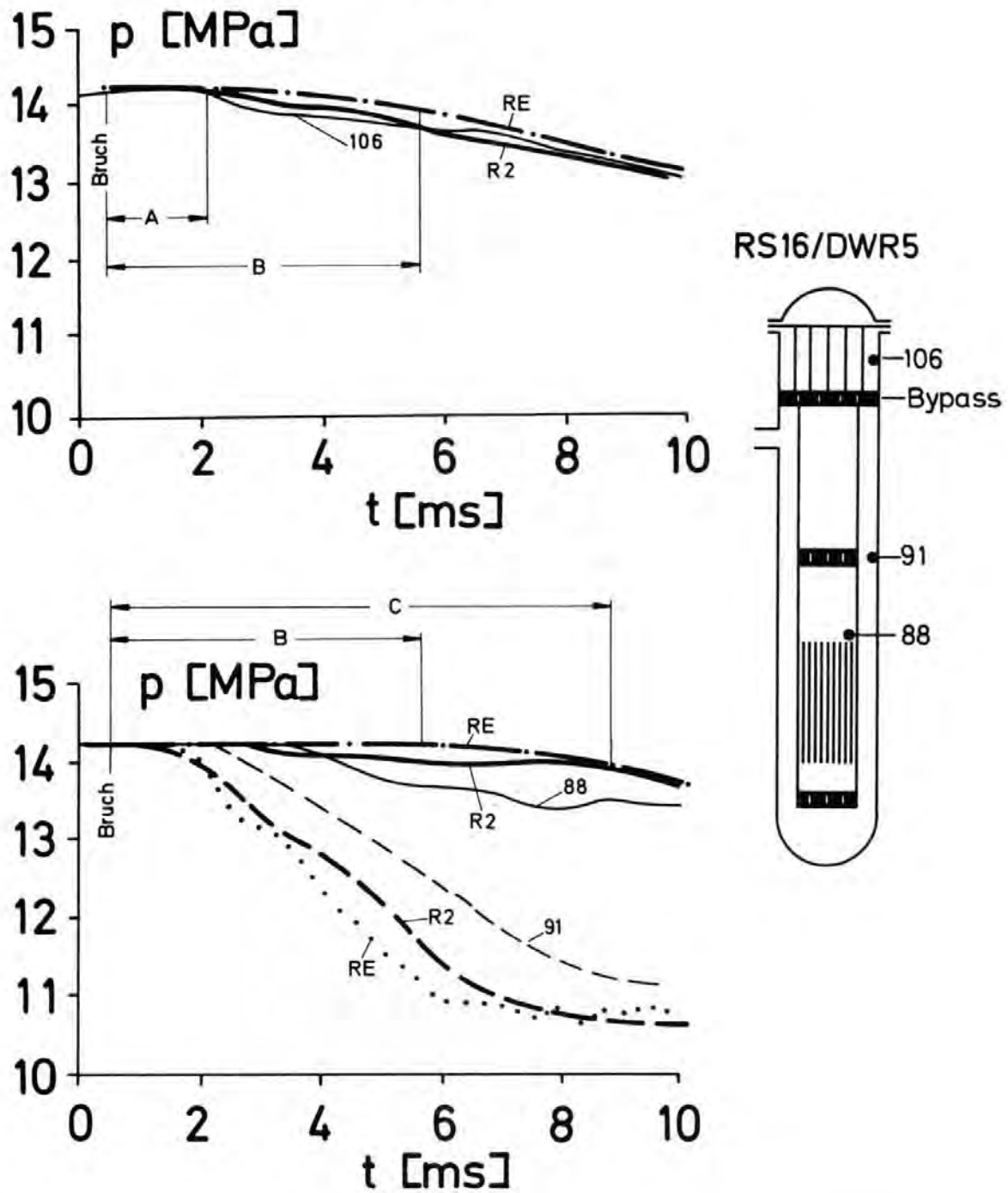


Abb. 6-37: Druckentlastung im RS16-Behälter. Vergleich von Rechnungen mit (R2) und ohne (RE) Struktur-Rückwirkung mit Experiment.

A: Laufzeit Stutzen-106 über Bypass

B: Laufzeit Stutzen-88 über unteres Plenum

C: Laufzeit Stutzen-106 über unteres Plenum



In Abb. 6-37 wird der Effekt der Fluid-Struktur-Koppelung deutlich. Ohne Koppelung würde der Druck an der Meßstelle 88 erst nach der Laufzeit B etwas von der Druckentlastung "merken". Dies wird vom Ergebnis der entkoppelten Rechnung, Fall RE, bestätigt. Mit Koppelung (Fall R2) ist der Druck aber schon früher aufgrund der Kernmantelaufweitung abgesunken, wenngleich die Übereinstimmung mit den Meßwerten hier nur qualitativ gut ist. Nach Ankunft der Entlastungswelle über das untere Plenum (Laufzeit C) ist der Druck an der Meßstelle 88 bereits deutlich abgesunken. Auch an der Meßstelle 106 macht sich die Koppelung bemerkbar, wie der Vergleich der Rechen-Fälle RE und R2 zeigt.

Insgesamt ist die Übereinstimmung zwischen den Druckmeßwerten und den FLUX2-Rechnenergebnissen als gut zu bezeichnen. Die Übereinstimmung ist auf jeden Fall deutlich besser als hinsichtlich der mit anderen Rechencodes (WHAM, LECK) erhaltenen Werte, siehe 2, Abb. 19, 20.

Es muß allerdings eingeräumt werden, daß die Güte der Rechenergebnisse wesentlich von der Anpassung des Reibkoeffizienten  $f_{damp}$  abhängt. Ohne die Fluid-Dämpfung zeigen die Rechenergebnisse sehr viel stärkere Oszillationen als die Messungen. Erst nach Wahl des relativ großen Wertes  $f_{damp} = 0,25$  konnte die gezeigte gute Übereinstimmung erzielt werden (siehe § A1.4).

#### 6.4.3 Dehnungen

In Abb. 6-38 sind die gemessenen und gerechneten tangentialen Membrandehnungen am Kernmantel (Mittelwert der Meßwerte 150 und 151) verglichen. Mit üblichen Querkontraktionszahlen  $\nu > 0$  für das Schalenmaterial ergab die Rechnung völlig andere Werte als die Messung. Dies konnte, wie bereits in § 6.1.2 erwähnt, auf eine ungeeignete Formulierung der Randbedingungen im CYLDY2-Modell zurückgeführt werden. Bei Vernachlässigung der Querkontraktion ( $\nu = 0$ ) ist die Übereinstimmung zwischen Messung und Rechnung deutlich besser, wenn auch noch nicht zufriedenstellend. Hier sind verbesserte Strukturmodelle notwendig.

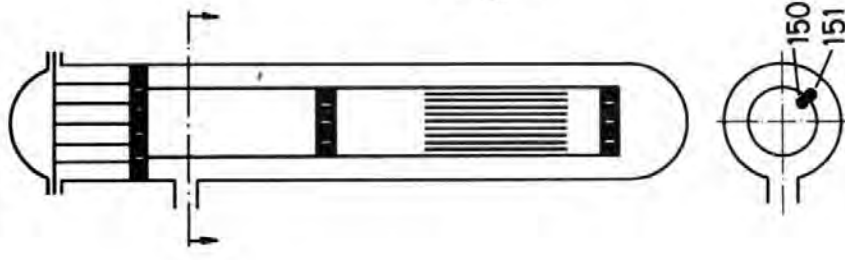
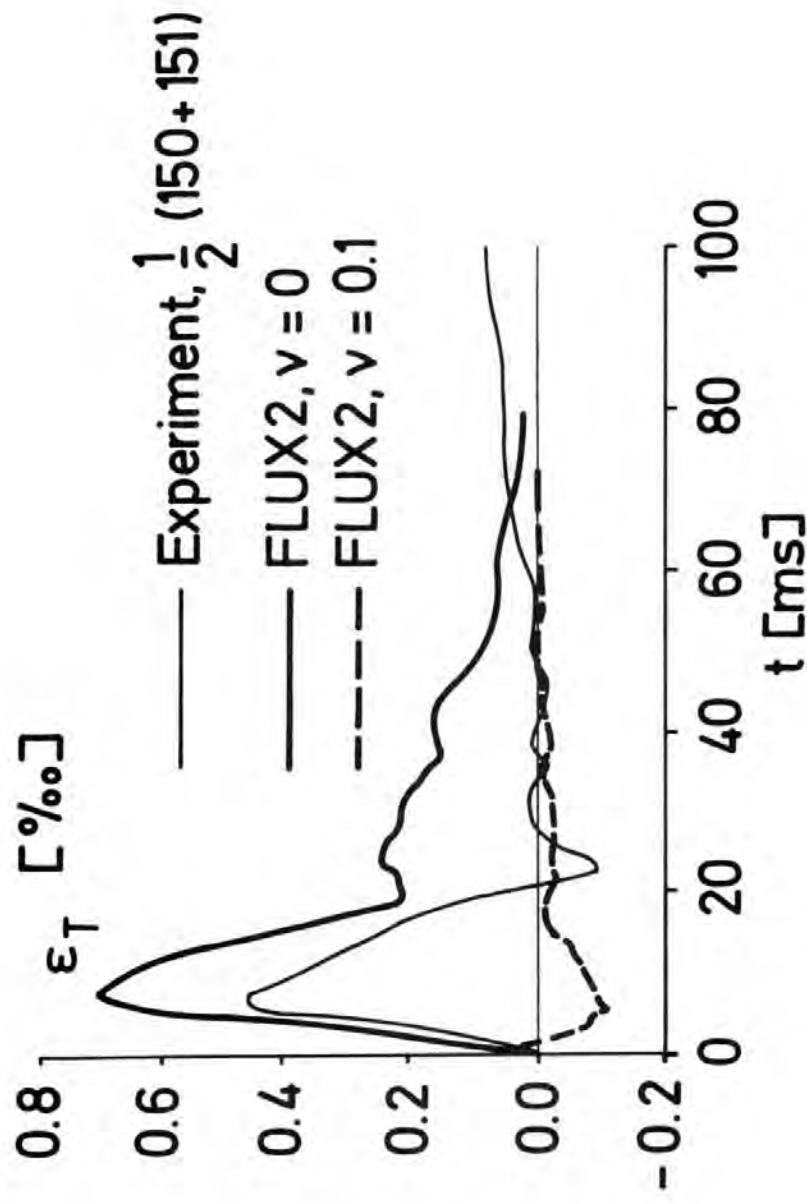


Abb. 6-38: Mittlere azimutale Dehnung in der Höhe des Bruchstutzens bei  $\varphi = 135^\circ$ , Vergleich Experiment mit Rechnungen (R2) für verschiedene Querkontraktionszahlen  $\nu$ .

Die Einzelmeßergebnisse der Meßstellen 150 und 151 zeigen eine ausgeprägte gegenläufige Schwingung mit 77 Hz, die im Mittelwert nahezu ausgeglichen ist (Abb. 41 in  $[^2_7]$ ). Diese Dehnungen sind als Folge einer Schwingung im Ovalisierungsmoden  $n = 2, m = 1$  erklärbar, für den die inkompressible Eigenanalyse gemäß Tabelle 7 und Abb. 6-8 eine Eigenfrequenz von 74 Hz ergab. Es handelt sich keinesfalls um eine axiale Biegeschwingung, bei denen die Eigenfrequenzen deutlich niedriger wären. Dies Ergebnis zeigt, daß die Bewegungsvorgänge der Schale mit einfachen Modellen, z.B. nach Art der Kesselformel, nur sehr unvollständig erklärt werden können.

#### 6.4.4 Ausströmgeschwindigkeit, Massenstrom und weitere Rechenergebnisse

Die Fluid-Struktur-Koppelung hat im Falle des RS16 nur geringe Auswirkungen auf die Ausströmgeschwindigkeit, wie Abb. 6-39 zeigt. Die maximale Ausströmgeschwindigkeit von ca. 65 m/s liegt deutlich unterhalb des Meßergebnisses von ca. 111 bis 121 m/s (je nach Meßmethode, siehe Tabelle 8 und 9 in  $[^2_7]$ ). Allerdings wird die zeitliche Variation mit Erreichen des ersten Maximums nach ca. 6 ms gut von der Rechnung wiedergegeben. Der Unterschied im Geschwindigkeitsbetrag ist sicher eine Folge der nicht erfaßten Zweiphasenströmung. Die Übereinstimmung hinsichtlich des maximalen Massenstroms, Rechnung: 800 kg/s (siehe Abb. 6-39, rechte Skala), Experiment: 974 kg/s (Tabelle 10 in  $[^2_7]$ ) ist schon wesentlich besser.

Ohne Vergleich mit Meßwerten (wegen fehlender Daten) sind in Abb. 6-40 die Schalenverformungen und in Abb. 6-41 die maximalen Spannungen, mit und ohne Berücksichtigung der Strukturrückwirkung, dargestellt. Qualitativ ist der Effekt der Kopplung ähnlich dem beim HDR. Allerdings liefert die entkoppelte Rechnung hier etwas weniger stark abweichende Ergebnisse, was eine Folge der berücksichtigten Strukturdämpfung sein kann.

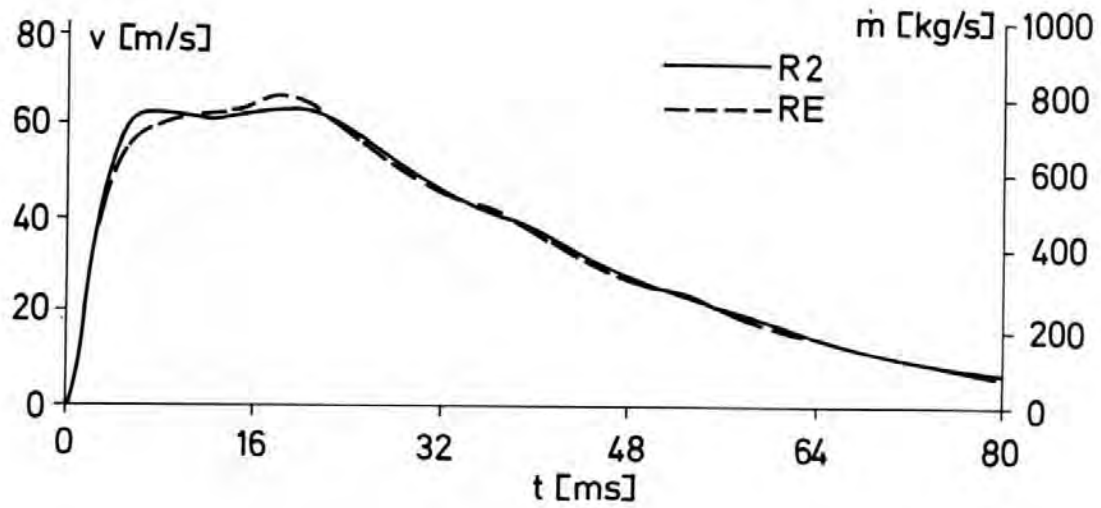


Abb. 6-39: Ausströmgeschwindigkeit  $v$  und Massenstromrate  $\dot{m}$  als Funktion der Zeit  $t$  bei gekoppelter (R2) und entkoppelter (RE) Rechnung.

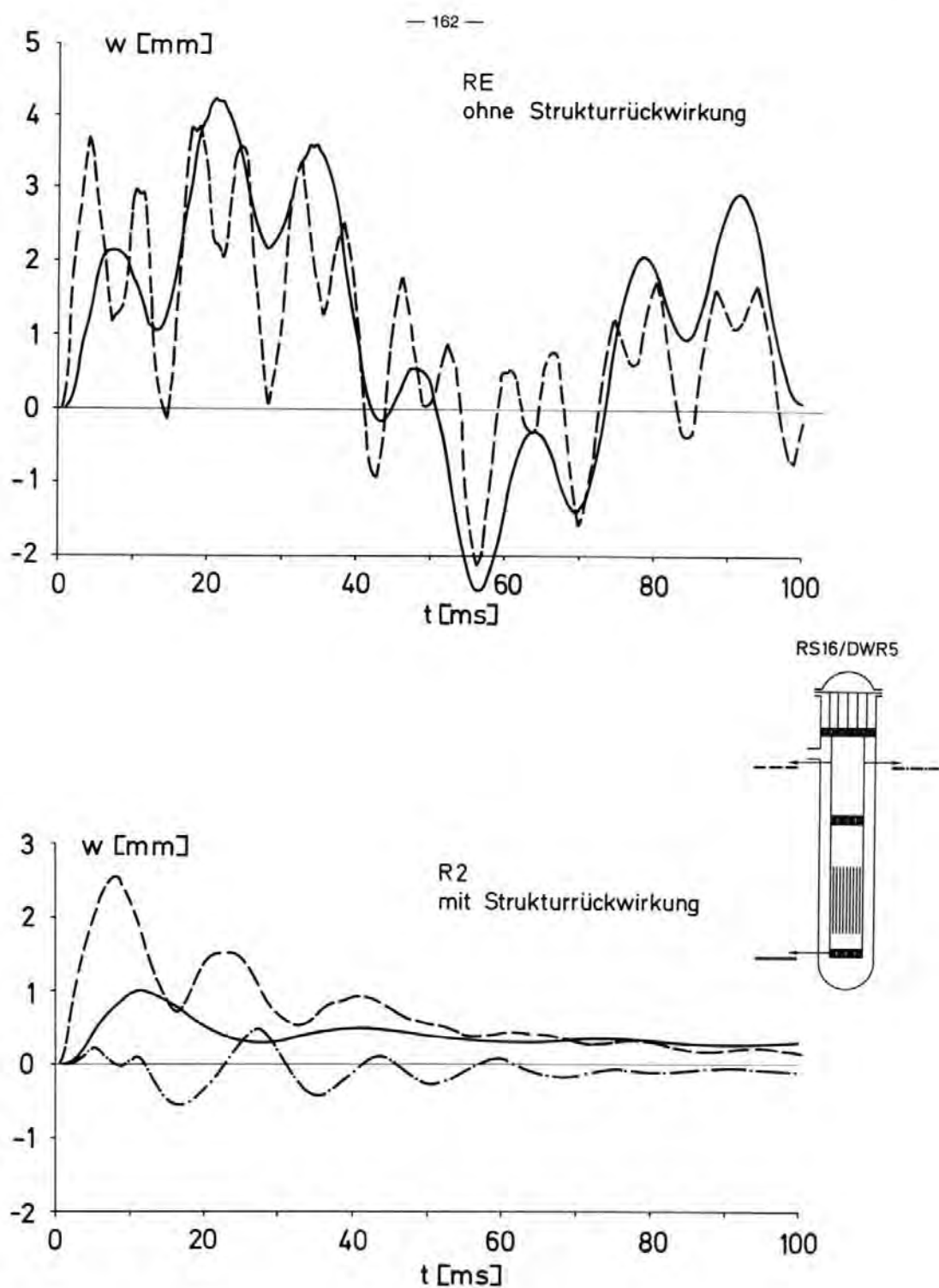


Abb. 6-40: Radiale RS16-Kernmantel-Verformung als Funktion der Zeit  $t$  ohne und mit Struktur-Rückwirkung, Fälle RE und R2.

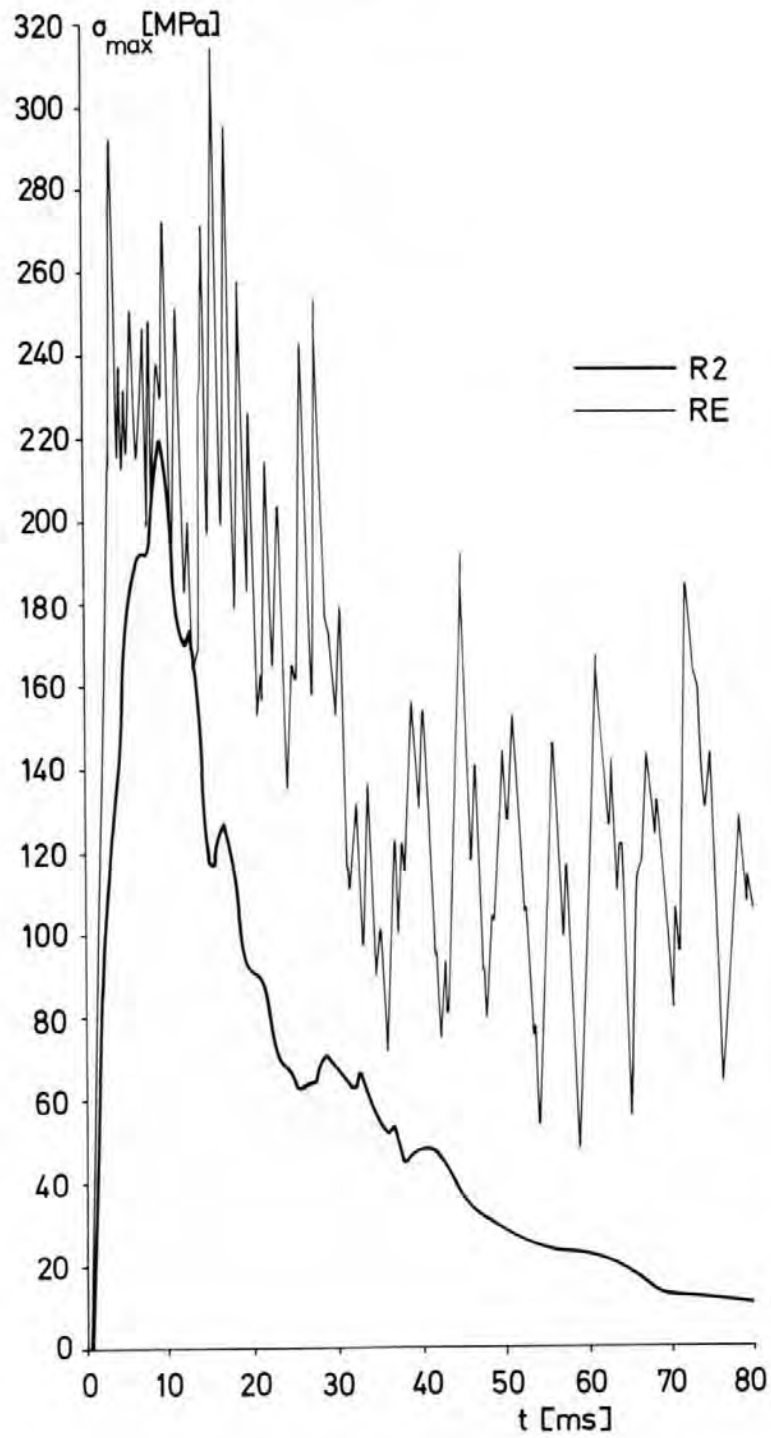


Abb. 6-41: Maximale Spannung im RS16-Kernmantel bei gekoppelter (R2) und entkoppelter (RE) Rechnung als Funktion der Zeit  $t$ .

### 6.5 Belastungen eines DWR-Kernmantels

Mit dem (durch die bisher beschriebenen Ergebnissen zumindest teilweise verifizierten) Programm sollen nun die Belastungen eines typischen DWR-Kernmantels ermittelt werden. Hierzu wurden die Fälle D2 und DE mit FLUX2 sowie DF2 mit FLUX1 analysiert.

Abb. 6-42 zeigt die resultierenden Druckwerte. Auffallend ist das relativ rasche Absinken des Druckes als Folge des im Vergleich zum HDR sehr viel größeren Rohrdurchmessers. Qualitativ ist das Ergebnis jedoch wie im Falle des HDR.

Die Kernmantelverformung ist gemäß Abb. 6-43 etwa doppelt so groß wie beim HDR. Bezogen auf den Kernmantelradius sind sich HDR und DWR in den Verformungsamplituden ähnlich. Auch die Schwingungsfrequenzen sind vergleichbar. Allerdings ist die akustische Schwingung im Rohr wegen der größeren Länge niederfrequenter, weswegen die dynamische Reaktion der Schale bei hohen Frequenzen weniger ausgeprägt ist.

Von wesentlichem Interesse sind letztlich die ermittelten Spannungen. In Abb. 6-44 sind die Maximalspannungen entsprechend den Ergebnissen der kompressiblen Rechnung mit (D2) und ohne (DE) Rückkoppelung sowie die inkompressiblen FLUX1-Ergebnisse (DF2) gegenübergestellt. Qualitativ entsprechen diese Ergebnisse denen beim HDR. Im einzelnen ist festzustellen:

- ohne Rückkoppelung (DE) werden um etwa 30 % zu große Spannungen berechnet; diese Zahl dürfte allerdings wesentlich von der berücksichtigten Dämpfung beeinflusst sein.
- mit dem inkompressiblen Modell liegen die Spannungen um etwa 10 % über denen für das kompressible Modell; FLUX1 liefert also auch hier eine recht brauchbare Näherung.
- Die Maximalspannung wird nach ca. 30 ms erreicht und beträgt etwa  $14 \text{ kp/mm}^2$ . Dieser Wert dürfte nicht zu einer bleibenden Verformung des Kernmantels führen.

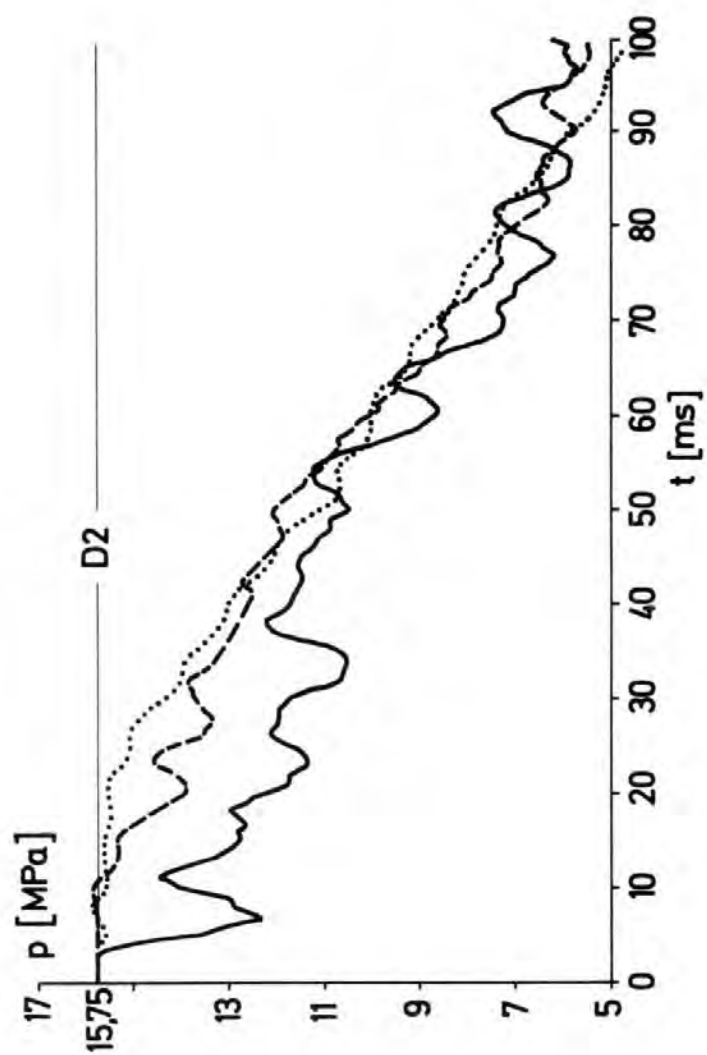
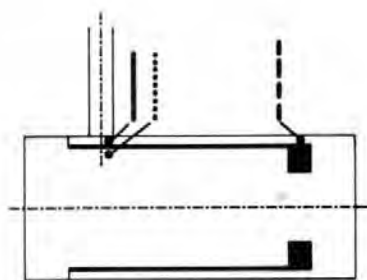


Abb. 6-42: Drucke  $p$  als Funktion der Zeit  $t$  für DWR Fall D2.





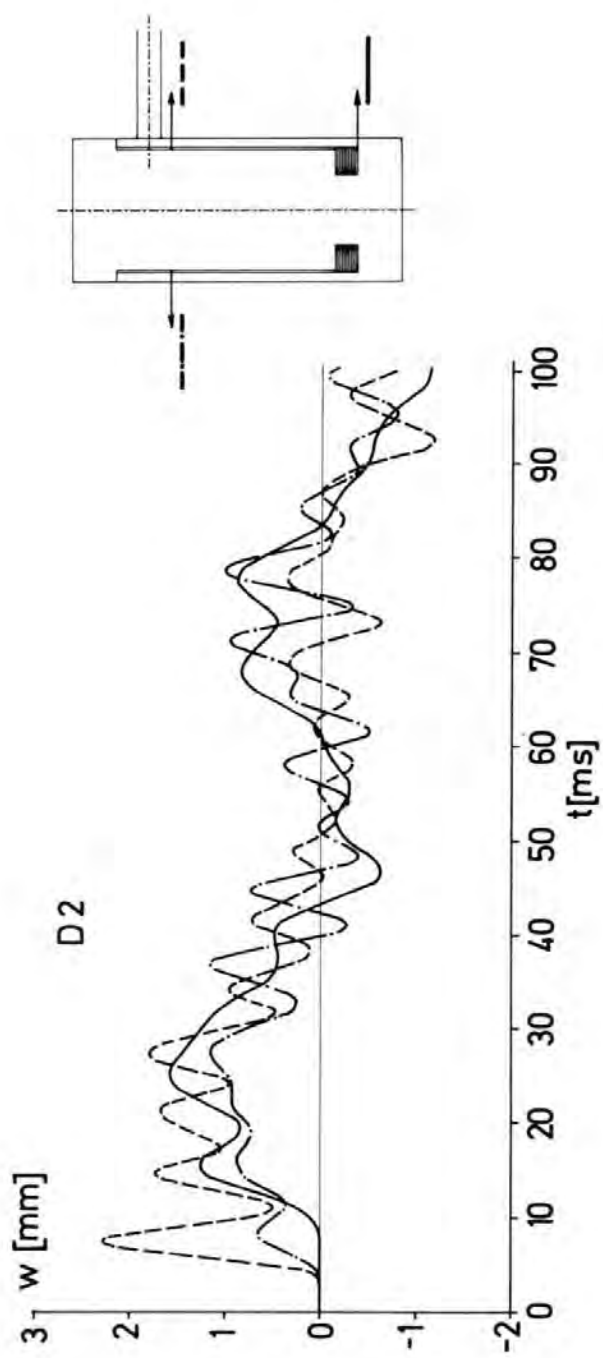


Abb. 6-43: Radiale Kernmantel-Verformung  $w$  als Funktion der Zeit  $t$  für DWR Fall D2.

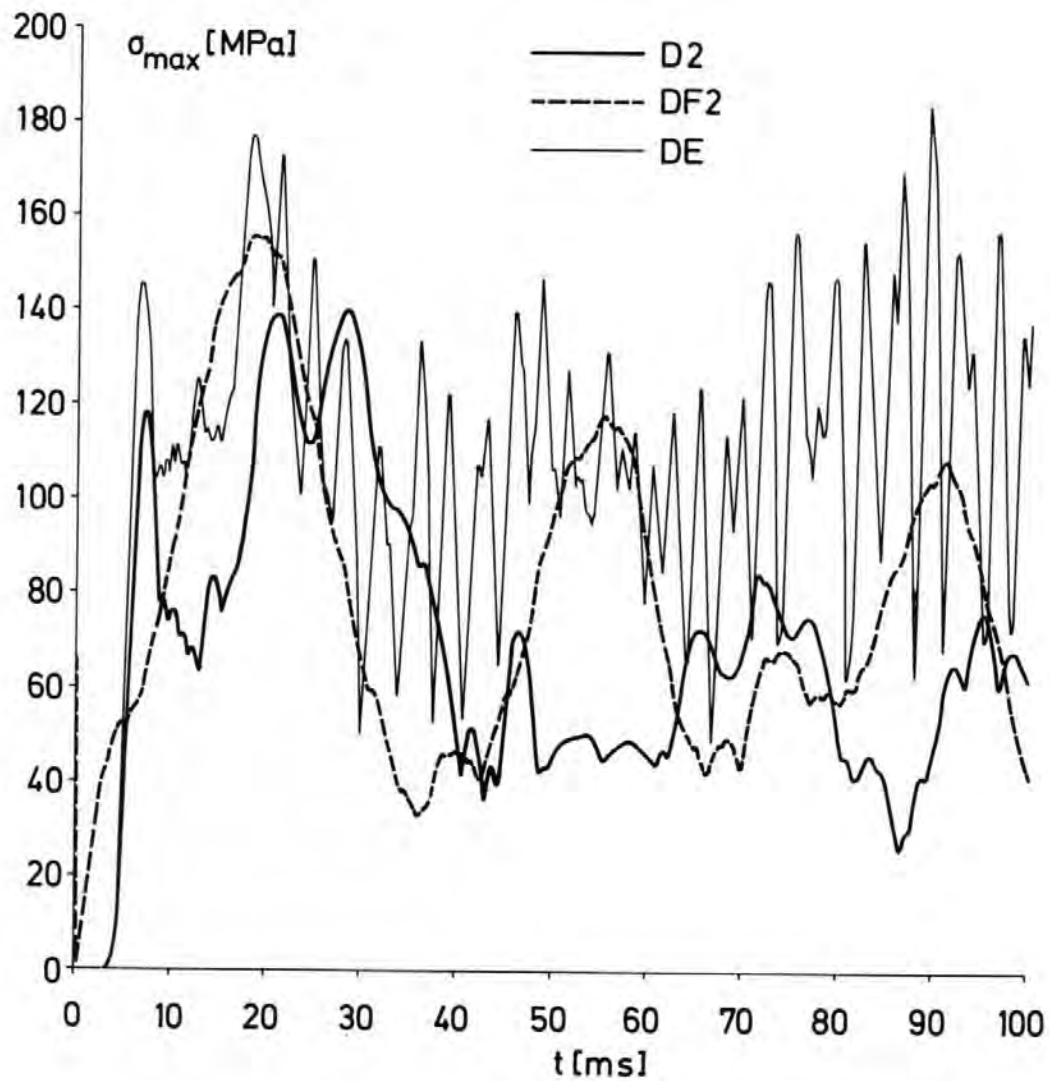


Abb. 6-44: Maximale Spannung  $\sigma_{max}$  im DWR-Kernmantel als Funktion der Zeit  $t$  nach verschiedenen Modellen:  
D2: kompressibel mit Rückwirkung  
DF2: inkompressibel (FLUX1) mit virtueller Masse  
DE: kompressibel ohne Rückwirkung

## 7. SCHLUSSFOLGERUNGEN

### 7.1 Zum Reaktor-Sicherheits-Aspekt

- In allen betrachteten Fällen liefert eine entkoppelte Rechnung konservative Ergebnisse hinsichtlich der maximalen Beanspruchung des Kernmantels.
- Diese Konservativität kann durch die fehlende Berücksichtigung der virtuellen Trägheit des Fluids und des Abbaus von Druckspitzen sowie dem einseitigen Energietransfer vom Fluid auf die Struktur bei entkoppelter Rechnung erklärt werden.
- Aufgrund dieser quantitativen Einzelergebnisse und der qualitativen Erklärung kann die Konservativität entkoppelter Rechnungen hinsichtlich der Belastungen des Kernmantels allgemein postuliert werden.
- Allerdings können die Ergebnisse einer entkoppelten Rechnung sehr weit von der wahren Lösung entfernt sein.
- Unter den beschriebenen Bedingungen werden bei einem DWR maximale Kernmantel-Spannungen erreicht, die im Bereich der Streckgrenze liegen. Einen wesentlichen Einfluß hat dabei die Länge des Bruchstutzens.
- Das HDR-Experiment ist einem typischen DWR-Blowdown genügend ähnlich, um daraus Schlußfolgerungen für die Sicherheit eines DWR ziehen zu können. Das elastische Potential des HDR-Kernmantels wird bei den hier untersuchten Randbedingungen nicht voll ausgenutzt.

### 7.2 Zum Modell

- Abschätzungen anhand dimensionsloser Kennzahlen (Anhang 7) lassen die im Modell benutzten Annahmen als zulässig erscheinen.
- Aus dem Vergleich mit den RS16-Experimenten ergibt sich eine ausreichende Übereinstimmung zwischen den Rechnungen und Messungen.

- In der unterkühlten Phase, in der die maximalen Belastungen auftreten, ist ein Potentialströmungsmodell zulässig.
- Für viele Fälle ist ein inkompressibles Strömungsmodell ausreichend genau und zumindest konservativ.
- Der wichtigste Strömungsbereich ist der 2 1/2-dimensional erfaßbare Ringraum; darüberhinaus zeigen jedoch mehrere Einzelergebnisse (§6.2.2) die Notwendigkeit eines dreidimensionalen Modells.

Einige verbesserungsfähige Aspekte des Modells sind im Anhang 9 angegeben. Die weitere Verifizierung von FLUX wird anhand der HDR-Experimente erfolgen.

### 7.3 Zum numerischen Verfahren

- Das gekoppelte Problem erfordert eine implizite Diskretisierung.
- Fluid und Struktur können nach unterschiedlichen Methoden diskretisiert sein. Die maßgebenden Bedingungen für die Stabilität des gekoppelten Problems sind in §3 angegeben.
- Vorsicht mit vollimpliziten Integrationsverfahren, z.B. nach der ICE-Technik! Sie bewirken eine u.U. wesentliche numerische Dämpfung. Das Newmark-Verfahren hat hier Vorteile.
- Je nach den interessierenden Größen weist eine Rechnung mit den Netzen N2 oder N3 genügend kleine Approximationsfehler auf.
- Entscheidend für die Effektivität des Lösungsverfahrens ist der Einsatz schneller elliptischer Löser. Diese sind trotz komplexer 3D-Geometrie und teilweise singulärer Gleichungen zusammen mit der Einflußmatrix-Technik erfolgreich anwendbar.
- Die Anwendung dieser Methoden erfordert eine Spezialprogramm-entwicklung, die sich jedoch auszahlt.

#### 7.4 Weitere Anwendungen

Weitere Fluid-Struktur-Koppelungsprobleme wie

- Erdbebenbelastungen eines Reaktors
- Berstverhalten eines Druckbehälters

und andere mehr lassen sich eventuell mit einem modifizierten FLUX-Programm erfassen. Dabei kann es notwendig sein, auch den Druckbehälter selbst als verformbare Struktur zu erfassen. Weit mehr als das Programm sind jedoch die prinzipiellen Methoden und insbesondere die schnellen elliptischen Löser auf viele andere Probleme anwendbar.

Tabelle 1 EINGABE-PARAMETER FÜR DIE HDR-, DWR- UND RS16-SITUATION

Tab. 1a: Geometrische Daten  $\bar{L}_m$ ; vergleiche Abb. 6-1

		HDR	DWR	RS16
$R_M$	Radius der Kernmantel-Mittelebene	1,3185	2,145	0,3065
$L_M$	Länge des Ringraums = dynamisch effektive Länge des Kernmantels	7,57	8,24	7,39
$R_S$	Rohrradius	0,100	0,4025	0,0715
$L_F$	Abstand der Stutzenachse vom Flansch-Auflager	0,72	1,12	1,34
$H_R$	Breite des Ringraumes	0,150	0,315	0,077
$H_M$	Dicke der Kernmantelschale	0,023	0,080	0,008
$L_S$	Länge des Blowdown-Stutzens (kurz/lang)	1,10 /5,43	3,7 /6,0	0,35 /-
$R_{RI}$	Masse-Ring, Innenradius	0,81	1,20	0,2
$R_{R1}$	Masse-Ring, Außenradius	1,105	2,105	0,3065
$B_{R1}$	Höhe des Masse-Ringes	0,75	0,682	0,3065
$B_{R2}$	Höhe des Zwischenringes	0,14	0	0,13
$R_{RA}$	Außenradius des Zwischenringes	1,307	0	0,13
$L_U$	effektive Höhe des oberen Plenums: so daß $\pi R_V^2 L_U$ = Volumen des oberen Plenums	1,0	1,6	1,97
$L_L$	effektive Höhe des unteren Plenums, so daß $\pi R_V^2 L_L$ = Volumen des unteren Plenums	1,8	1,5	1,7
$R_V$	Innenradius-Druckbehälter $= R_M + H_M/2 + H_R$	1,48	2,50	0,3875
$f_{Loch}$	Flächenanteil der Löcher am Flansch bezogen auf Ringraum- querschnitt = $\theta$ in §A3.2.4	0	0	0,039

Tab. 1b: Stoffdaten des Kernmantels

		HDR	DWR	RS16
$\rho_M$	Dichte des Mantels bei nominalen Maßen $[kg/m^3]$	7800	7800	7800
E	Elastizitätsmodul $[N/m^2]$	$1,7 \cdot 10^{11}$	$1,7 \cdot 10^{11}$	$2 \cdot 10^{11}$
$\nu$	Querkontraktionszahl	0,3	0,3	0
$\rho_R$	Dichte des Masse-Ringes <u>oder</u> $[kg/m^3]$	7800		
$M_R$	Masse des Masseringes $[kg]$ $\approx 1/2$ Core-Masse bzw. Masse des starren Mantel- teils	$12 \cdot 10^3$	$50 \cdot 10^3$	1400
$I_{ZZ}$	Rotationsträgheit des Ringes (wenn geometrische Maße und Dichte nicht festliegen) $[kg \cdot m^2]$	6100	75000	9067
$s_{damp}$	Dämpfungskoeffizient für die Struktur gemäß Gl. (A4-10) $[-\%]$	0	1	1

Tab. 1c: Charakteristische Fluid- und Bruchdaten  
(bei HDR für Versuch 3, bei RS16 für Versuch DWR5)

			HDR	DWR	RS16
$p_o$	Anfangsdruck $[MPa]$		11	15,75	14,2
$T_R$	Anfangstemp. (gemittelt) im Ringraum $[^{\circ}C]$		268	290	280
$T_I$	Anfangstemp. (gemittelt) im Innenraum $[^{\circ}C]$		305	320	280
$\rho_o$	Dichte zu $(p_o, T_R)$ $[kg/m^3]$		781,3	746,9	762,5
$a$	Schallgeschw. zu $(p_o, T_R)$ $[m/s]$		1088	948	1070
$p_S$	Sattdampfdruck zu $T_R$ $[MPa]$		5,335	7,445	6,419
$T_S$	Sattdampftemp. zu $p_o$ $[^{\circ}C]$		318	346	337,75
$\Delta t_{Bruch}$	Bruchöffnungszeit $[ms]$		0	3	1
$f_{damp}$	Dämpfungsmaß für das Fluid gemäß Gl. (A1-37) $[-]$		0	0,1	0,25
$\eta$	dyn. Viskosität $[10^{-5} kg/(ms)]$		10,1	9,44	9,8



Tabelle 2 MASCHENNETZE UND STRUKTUR-DISKRETISIERUNG  
(vergl. Abb. 2-3)

Programm-Symbol	Bezeichnung	Wert bei Netz		
		N1	N2	N3
MM	radiale Maschenzahl im Ringraum	2	4	5
MV	radiale Maschenzahl im Druckbehälter (MV-MM = Anzahl der radialen Maschen im Ringraum)	3	5	6
MR	radiale Maschenzahl für den Masse-Ring	1	1	2
MS	Anzahl der Maschen im Stutzen-Rohr	10	10	10
NM	axiale Maschenzahl im Ringraum (bei HDR und DWR)	7	17	33
	dito für RS16	15	33	-
NL	maximaler axialer Maschenindex j ("lower plenum") (für HDR und DWR)	10	20	38
NU	minimaler axialer Maschenindex j ("upper plenum") für HDR	1	-1	-3
KM	maximaler Umfangsindex k im Fluid	4	8	16
CYMM	maximaler Index m der axialen Formfunktionen der Struktur (m = 1, 2, ..., CYMM)	3	10	16
CYNM	maximaler Index n der azimuthalen Formfunktionen der Struktur (Kosinus-Modes) (n = 0, 1, 2, ..., CYNM)	4	8	16
CYIM	Anzahl der Stützstellen für die Spannungsberechnung axial	9	19	35
CYJM	dito am halben Umfang	5	9	17

Programm-Symbol	Bezeichnung	Wert bei Netz		
		N1	N2	N3
BIT4	Einschluß des Bereiches in der Ecke oberhalb des Flansches	nein	nein	ja
BIT3	Einschluß des unteren Plenums	ja	ja	ja
BRING	Berücksichtigung der axialen Beschleunigung des Ringes bezüglich Fluid	nein	nein	nein
DT	Zeitschrittweite in FLUX2 $\Delta t_{ms}$	0,5	0,2	0,1
TAU(1)	Abbruchparameter $\epsilon$ der abgebrochenen CYR und EMT für das Druckfeld mit gekoppelter Struktur	$10^{-14}$	$10^{-10}$	$10^{-7}$
TAU(2)	dito für Geschwindigkeitspotential	$10^{-7}$	$10^{-5}$	$10^{-7}$
OMAX	maximale aufgelöste Struktureigenkreisfrequenz $\omega_{max}$ [ $Hz$ ] für HDR und DWR	6000	15000	30000
	dito für RS16	12000	30000	-
-	Gesamtzahl der Strukturfreiheitsgrade beim HDR	18	143	507
-	Gesamtzahl der Fluidmaschen beim HDR $= ((KM+1) \times MV+1) \times (NL-NU+1)$	170	1022	4326
BETA(1)	$\beta$ siehe Gl. (A2-4)	0,25	0,25	0,25
GAMMA(1)	$\gamma$ gemäß Gl. (A2-4)	0	0	0
GAMMA(2)	$\gamma_{\Phi}$ des Potential-Integrations-Verfahrens, siehe Gl. (2-23)	1	1	1
DTYP	= 1 bei spektraler Approximation = 2 bei finiter Differenzen-Approximation der Umfangsableitungen	1	1	1

Tabelle 3 FALL-SPEZIFIKATIONEN

Tab. 3a: FLUX1-Rechnungen

Fall	Geometrie	Netz	Erläuterungen
F1	HDR	N1	} Standardfälle für HDR (spektrale Ableitungen)
F2	HDR	N2	
F3	HDR	N3	
FD1	HDR	N1	} finite Differenzen für azimutale Ableitungen
FD2	HDR	N2	
DF1	DWR	N1	DWR
DF2	DWR	N2	
RF1	RS16	N1	RS16
RF2	RS16	N2	

Tab. 3b: FLUX2-Rechnungen

Fall	Geometrie	Netz	Erläuterungen
T1	HDR	N1	Standard; keine Dämpfung; Newmark
T2	"	"	$f_{\text{damp}} = 0,03$ ; $s_{\text{damp}} = 0,01$ ; Newmark
T3	"	"	keine physik. Dämpfung, aber ICE ( $\beta=\gamma=0,5$ )
H1	"	N1	Standard: kompressibel, nichtlinear, gekoppelt mit Struktur, Newmark, keine physikalische Dämpfung
H2	"	N2	
H3	"	N3	
H1I	HDR	N1	H1 aber inkompressibel und $\beta=\gamma=0,5$
HE	"	N2	H2 aber entkoppelt mit dynamischer Struktur ohne virtuelle Fluid-Masse
HV	"	"	H2 aber entkoppelt mit dynamischer Struktur <u>mit</u> virtueller Fluid-Masse
HS	"	"	H2 aber entkoppelt mit quasi- statischer Struktur
HL	"	"	H2 aber ohne kinetische Energie, also linear
HK	"	"	H2 aber " <u>k</u> leiner" Stutzen $L_S = 0,15 \text{ m}$ , $MS = 1$
HG	"	"	H2 aber " <u>g</u> roßer" Stutzen, $L_S = 5,43 \text{ m}$ , $MS = 54$
HD	"	"	H2 aber mit physik. Dämpfung und end- licher Bruchöffnungszeit:  $f_{\text{damp}} = 0,05$ ; $s_{\text{damp}} = 0,01$ ; $\Delta t_{\text{Bruch}} = 1 \text{ ms.}$
D2	DWR	N2	wie H2 aber DWR
DE	"	"	wie HE aber DWR
R2	RS16	"	wie H2 aber RS16, im Ringraum werden axial doppelt so viele Maschen benutzt, vergl. Tab. 2
RE	"	"	wie R2 aber entkoppelt wie bei HE

**Tabelle 4** ERGEBNISSE FÜR INKOMPRESSIBLE POTENTIALSTRÖMUNG BEI STARRER STRUKTUR  
(vergl. § 6.2.1 und 6.2.3)

Fall	F1	F2	F3	FD1	FD2	DF1	DF2	RF1	RF2	Ein- heit
Geometrie	HDR	HDR	HDR	HDR	HDR	DWR	DWR	RS16	RS16	-
$\tau$	12.37	12.59	12.55	12.47	12.67	37.89	39.21	7.93	6.48	ms
$\Delta p_{\max}$ , $t=0$ $\Delta p_{\max}$ , $t=\infty$	1.17 0.015	1.24 0.051	1.24 0.034	1.21 0.007	1.27 0.061	2.652 0.462	2.727 1.682	4.34 0.05	3.73 0.30	MPa
$\Delta p_{U,\max}$ , $t=0$	0.407	0.486	0.518	0.448	0.528	1.087	1.296	0.410	0.767	MPa
F, $t=0$ F, $t=\infty$	1.451 0.083	1.427 0.107	1.431 0.121	1.514 0.074	1.437 0.096	11.12 6.22	10.81 8.72	0.152 0.047	0.185 0.090	MN
M, $t=0$ M, $t=\infty$	2.098 0.128	2.117 0.148	2.162 0.164	2.230 0.129	2.140 0.142	25.27 16.78	24.03 19.37	0.217 0.071	0.252 0.120	MNm
$p_0 - p_1$	5.665	5.665	5.665	5.665	5.665	8.305	8.305	7.781	7.781	MPa
$v_{\max}$	120.42	120.42	120.42	120.42	120.42	149.22	149.17	142.95	142.95	m/s
$\sigma_{\max}$	72.7	85.4	105.8	77.4	88.7	100.8	155.4	425	449	MPa
$t_{\max}$	22.2	25.0	25.2	22.2	24.8	17	19.4	9.4	10.6	ms
$z_{\max}$	2.7	0.7	0	2.7	0.7	2.9	0	0.5	0.2	m
$\phi_{\max}$	45	0	180	45	0	0	180	45	0	grad

Tabelle 5: RECHENZEITEN UND RUNDUNGSFEHLER VON FLUX1

Fall	Netz	Rechenzeit <sup>*)</sup> IBM 370/168 (Minuten)	Rundungs- fehler	Massen- fehler	Abbruch- parameter
F1	N1	3,5	$5,5 \times 10^{-15}$	$2,5 \times 10^{-15}$	$10^{-7}$
F2	N2	15,8	$1,4 \times 10^{-12}$	$3,5 \times 10^{-14}$	$10^{-7}$
F3	N3	130	$3,2 \times 10^{-14}$	$1,5 \times 10^{-14}$	$10^{-11}$

\*) einschließlich Potentialberechnung, Eigenanalyse und dynamischer Integration für  $0 \leq t \leq 100$  ms

Tabelle 6: RECHENZEITEN VON FLUX2

Fall	Netz	Rechenzeit IBM 370/168 [Minuten] $0 \leq t \leq 100$ ms
H1	N1	3,2
H2	N2	40,5
H3	N3	529 <sup>*)</sup>

\*) H3 wurde nur bis  $t=57$  ms integriert;  
die Rechenzeit wurde auf 100 ms extrapoliert.

Tabelle 7: DIE ZEHN ERSTEN EIGENFREQUENZEN  $f$  [Hz] (Netz N2)

	HDR/Vakuum			HDR/Wasser		
	f	n	m	f	n	m
1	18.9	1	1	9.1	1	1
2	42.8	3	1	14.9	3	1
3	49.4	4	1	18.0	2	1
4	65.8	2	1	19.0	0	1
5	72.6	5	1	20.2	4	1
6	72.8	4	2	30.3	4	2
7	83.1	5	2	32.7	3	2
8	90.7	3	2	33.1	5	1
9	104.3	6	1	38.4	5	2
10	104.5	5	3	43.2	2	2

	DWR/Vakuum			DWR/Wasser		
	f	n	m	f	n	m
1	29.7	1	1	19.7	1	1
2	53.6	3	1	27.7	0	1
3	66.0	4	1	27.7	3	1
4	72.4	2	1	31.2	2	1
5	95.0	4	2	38.2	4	1
6	97.0	5	1	56.3	3	2
7	104.1	3	2	56.3	4	2
8	114.1	5	2	60.5	5	1
9	135.9	4	3	69.2	2	2
10	138.8	6	1	72.0	5	2

RS16 ( $\nu=0$ ) / Vakuum			RS16 ( $\nu=0$ ) / Wasser			
	f	n	m	f	n	m
1	20.5	1	1	3.91	1	1
2	88.6	1	1	42.1	1	1
3	176.6	3	1	73.6	2	1
4	181.1	2	1	74.3	0	1
5	278.5	3	2	85.6	3	1
6	296.2	4	1	136.8	3	2
7	330.7	4	2	159.8	4	1
8	405.8	4	3	178.9	2	2
9	425.9	2	2	179.5	4	2
10	443.3	3	3	221.5	3	3

RS16 ( $\nu=0,3$ ) / Vakuum			RS16 ( $\nu=0,3$ ) / Wasser			
Nr	f	n	m	f	n	m
1	21.4	1	1	4.10	1	1
2	92.9	1	1	44.1	1	1
3	181.7	2	1	73.9	2	1
4	183.8	3	1	76.5	0	1
5	283.2	3	2	89.0	3	1
6	310.2	4	1	139.3	3	2
7	344.5	4	2	167.4	4	1
8	417.9	4	3	176.9	2	2
9	419.3	2	2	187.1	4	2
10	443.6	3	3	222.1	3	3



Tabelle 8: AUSWERTUNG VON NÄHERUNGSFORMELN

Tab. 8a: Atmungsmode

	Erläuterung	HDR	DWR
$M [kg]$	Schalenmasse	$11,25 \times 10^3$	$69,3 \times 10^3$
$F [kg]$	virtuelle Fluidmasse	$6240 \times 10^3$	$5960 \times 10^3$
$M+F [kg]$	Gesamtmasse	$6251,25 \times 10^3$	$6029,3 \times 10^3$
$S [N/m]$	Steifigkeit	$1,41 \times 10^{11}$	$3,28 \times 10^{11}$
$D [kg/s]$	Dämpfungskoeffizient	430,2	91,1
$\omega_0 [Hz]$	Kreisfrequenz in Vakuum	3541	2176
$f_0 [Hz]$	Frequenz in Vakuum	563,5	346,3
$f_0^* [Hz]$	CYLDY2-Ergebnis	560,3	352,2
$\omega [Hz]$	Kreisfrequenz in Wasser	150	233
$f [Hz]$	Frequenz in Wasser	23,9	37,1
$f^* [Hz]$	FLUX1-Ergebnis	19	27,7
$\xi [-]$	Dämpfungsmaß	$2,3 \times 10^{-7}$	$0,32 \times 10^{-7}$

Tab. 8b: Biegemode

	Erläuterung	HDR	DWR
$M_M [kg]$	Schalenmasse	$2,25 \times 10^3$	$13,9 \times 10^3$
$M_R [kg]$	Ringmasse	$12,0 \times 10^3$	$50,0 \times 10^3$
$F_I [kg]$	Innenraum	$6,46 \times 10^3$	$17,8 \times 10^3$
$F_R [kg]$	Ringraum	$56,79 \times 10^3$	$121,2 \times 10^3$
$M+F [kg]$	Gesamtmasse	$77,5 \times 10^3$	$202,9 \times 10^3$
$S [N/m]$	Steifigkeit	$2,6 \times 10^8$	$30,1 \times 10^8$
$D [kg/s]$	Dämpfungskoeffizient	3,9	1,85
$\omega_0 [Hz]$	Kreisfrequenz in Vakuum	135	217
$f_0 [Hz]$	Frequenz in Vakuum	21,5	34,6
$f_0^* [Hz]$	CYLDY2-Ergebnis	18,9	29,7
$\omega [Hz]$	Kreisfrequenz in Wasser	57,9	121,8
$f [Hz]$	Frequenz in Wasser	9,2	19,8
$f^* [Hz]$	FLUX1-Ergebnis	9,1	19,7
$\xi [-]$	Dämpfungsmaß	$4,3 \times 10^{-7}$	$0,37 \times 10^{-7}$

Tab. 8c: Relative Massenanteile der einzelnen Komponenten an der gesamten wirksamen Schwingungsmasse  $[\%]$

Komponente	HDR	DWR
<u>a) Atmungs-Mode</u>		
Kernmantel-Schale	0,17	1,15
Fluid	<u>99,83</u>	<u>98,85</u>
	100,00	100,00
<u>b) Biege-Mode</u>		
Kernmantel-Schale	2,9	6,9
Masse-Ring bzw. Core	15,5	24,6
Fluid im Innenraum	8,3	8,8
Fluid im Ringraum	<u>73,3</u>	<u>59,7</u>
	100,00	100,00

## Anhang 1: ABLEITUNG DER VERWENDETEN FLUID-GLEICHUNGEN

### A1.1 Die Feldgleichungen

Die Kontinuitäts-Gleichungen für Masse- und die Euler-Gleichung für Impulserhaltung im Fluid-Bereich lauten [40]:

$$\dot{\rho} + \operatorname{div}(\rho \underline{u}) = 0 \quad (\text{A1-1})$$

$$\rho (\dot{\underline{u}} + (\underline{u} \cdot \nabla) \underline{u}) = -\operatorname{grad} p + \underline{F} \quad (\text{A1-2})$$

Der Punkt bezeichnet die partielle Ableitung nach der Zeit;  $\rho$  ist die Fluid-Dichte,  $\underline{u}$  der Geschwindigkeitsvektor,  $p$  der Druck,  $\underline{F}$  eine Feldkraft und  $\underline{x}$  der Ortsvektor.

Zwischen Dichte und Druck fordern wir gemäß Annahme A2) den für isotherme Zustandsänderungen gültigen Zusammenhang

$$\rho = \rho_0 + \frac{1}{\alpha^2} (p - p_0), \quad (\text{A1-3})$$

mit konstanter Schallgeschwindigkeit  $\alpha$ . Die Werte  $\rho_0, p_0$  sind die Ausgangsdichte bzw. der Ausgangsdruck. Damit folgt aus (A1-1) und (A1-3):

$$\frac{1}{\alpha^2} \frac{\partial p}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \underline{u}) = 0 \quad (\text{A1-4})$$

Nachdem so die zeitlichen Änderungen der Dichte berücksichtigt sind, vernachlässigen wir weitere Dichtevariationen und schreiben

$$\rho \approx \rho_0, \quad (\text{A1-5})$$

d.h., wir fordern

$$|\rho - \rho_0| = \frac{|p - p_0|}{\alpha^2} < \frac{|\Delta p_{\max}|}{\alpha^2} \ll \rho_0. \quad (\text{A1-6})$$

Diese Annahme erscheint akzeptabel, wenn man anstelle der maximalen spezifischen potentiellen Energie  $\Delta p_{\max}$  die maximal erreichbare

spezifische kinetische Energie bei Beschleunigung aus der Ruhe  $\frac{1}{2} \rho_0 u_{\max}^2$  einsetzt. Dann ist ersichtlich, daß (A1-5) eine gute Näherung ist, falls

$$\left( \frac{u_{\max}}{\alpha} \right)^2 \ll 1, \quad (\text{A1-7})$$

Dies entspricht Annahme A3.

Wenn das Strömungsfeld gemäß Annahme A1 zudem rotationsfrei ist und also ein Potential  $\Phi$  existiert, so daß\*)

$$\boxed{\underline{u} = \text{grad } \Phi}, \quad (\text{A1-8})$$

dann gilt

$$(\underline{u} \cdot \nabla) \underline{u} = \frac{1}{2} \text{grad} (\underline{u}^2). \quad (\text{A1-9})$$

Damit  $\underline{u}$  zu allen Zeiten rotationsfrei bleibt, muß die Feldkraft  $\underline{F}$  rotationsfrei sein. Eine Zähigkeitskraft nach Stokes ist daher ausgeschlossen, jedoch kann "innere Reibung" in der Form

$$\underline{F} = - \rho_0 \varkappa \underline{u} \quad (\text{A1-10})$$

berücksichtigt werden, wobei

$$\varkappa = \text{const} \quad (\text{A1-11})$$

ein empirischer Reibkoeffizient von der Dimension  $[\text{Geschwindigkeit/Länge}]$  ist.

Mit der Definition der spezifischen kinetischen Energie

$$\boxed{E = \frac{1}{2} \rho_0 u^2} \quad (\text{A1-12})$$

---

\*) Eingerahmt sind die Gleichungen, die in FLUX numerisch integriert werden

und den genannten Annahmen erhalten wir die bezüglich Dichte-  
änderungen linearisierten Euler- und Kontinuitäts-Gleichungen:

$$\rho_0 \dot{u} = - \operatorname{grad} (p + E) - \rho_0 \kappa u \quad (\text{A1-13})$$

$$\frac{1}{\alpha^2} \ddot{p} + \operatorname{div} (\rho_0 u) = 0 \quad (\text{A1-14})$$

Die weiteren Operationen sind formal: Wir differenzieren (A1-14) nach der Zeit und substituieren  $\rho_0 \dot{u}$  aus (A1-13):

$$\frac{1}{\alpha^2} \ddot{p} - \operatorname{div} [\operatorname{grad} (p + E) + \rho_0 \kappa u] \quad (\text{A1-15})$$

Wegen (A1-14) kann  $\operatorname{div} (\rho_0 \kappa u)$  ersetzt werden mit dem Endergebnis:

$$\boxed{\frac{1}{\alpha^2} (\ddot{p} + \kappa \dot{p}) - \operatorname{div} \operatorname{grad} p = \operatorname{div} \operatorname{grad} E} \quad (\text{A1-16})$$

Für das Potential  $\Phi$ , definiert in (A1-8), folgt aus (A1-13):

$$\operatorname{div} (\rho_0 \operatorname{grad} \dot{\Phi}) = -\operatorname{div} \operatorname{grad} (p + E) - \operatorname{div} (\rho_0 \kappa u) \quad (\text{A1-17})$$

Beachten wir (A1-16), so erhalten wir:

$$\operatorname{div} (\rho_0 \operatorname{grad} \dot{\Phi}) = - \frac{1}{\alpha^2} \ddot{p} \quad (\text{A1-18})$$

Hierin darf formal  $\rho_0$  noch eine Funktion des Ortes sein. Im Programm wird jedoch

$$\rho_0 = \text{const} \quad (\text{A1-19})$$

angesetzt. Damit kann zu (A1-18) die Divergenz von (A1-14) addiert und durch  $\rho_0$  dividiert werden mit dem Endergebnis

$$\boxed{\operatorname{div} \operatorname{grad} (\dot{\Phi} + \varkappa \ddot{\Phi}) = - \frac{1}{\rho_0 \alpha^2} (\ddot{p} + \varkappa \dot{p})}. \quad (\text{A1-20})$$

Diese Formulierung hat den Vorteil, daß Randbedingungen nicht für  $\dot{\Phi}$  und  $\ddot{\Phi}$  getrennt, sondern nur in der Linearkombination  $\dot{\Phi} + \varkappa \ddot{\Phi}$  formuliert werden brauchen. Von seiten der Theorie ist zugelassen, daß die Schallgeschwindigkeit  $\alpha$  eine Funktion des Ortes ist. Im Programm darf  $\alpha$  bereichsweise unterschiedlich sein.

Es sei bemerkt, daß die letztlich zu integrierenden Gleichungen (A1-16, A1-20) für vernachlässigbar kleine kinetische Energie in die bekannte akustische Näherung [27] und für  $1/\alpha^2 \rightarrow 0$  exakt in die für inkompressible Potentialströmungen gültigen Gleichungen übergehen.

## A1.2 Randbedingungen und Anfangswerte

### A1.2.1 Randbedingung an festen und flexiblen Wänden

Gemäß Annahme A7 werden kleine Wandverschiebungen  $\underline{w}(\underline{x}, t)$  gefordert. An der unverformten Randfläche sollen die Normalenkomponenten der Geschwindigkeiten und Beschleunigungen übereinstimmen. Daraus ergeben sich für das Potential  $\Phi$  die "kinematischen" Randbedingungen

$$\underline{n} \cdot \operatorname{grad} \underline{\dot{\Phi}} = \underline{n} \cdot \underline{\dot{w}} \quad (\text{A1-21})$$

$$\underline{n} \cdot \operatorname{grad} \ddot{\Phi} = \underline{n} \cdot \ddot{w} \quad (\text{A1-22})$$

oder

$$\boxed{\underline{n} \cdot \operatorname{grad} (\dot{\Phi} + \varkappa \ddot{\Phi}) = \underline{n} \cdot (\dot{w} + \varkappa \ddot{w})}. \quad (\text{A1-23})$$

Aus (A1-23) und (A1-13) erhalten wir eine "dynamische" Randbedingung

$$\underline{n} \cdot \operatorname{grad} (p + E) = - \rho_0 \underline{n} \cdot (\ddot{w} + \varkappa \dot{w}). \quad (\text{A1-24})$$

Diese Randbedingungen wären ausreichend, wenn allein die Summe  $(p+E)$  bestimmt werden müßte. Für die Berechnung der auf die Struktur wirkenden Kräfte braucht man aber  $p$  selber und also eine Rechenvorschrift für  $\underline{n} \cdot \text{grad } E$ . Theoretisch ist

$$\text{grad } E = \oint_0 (\text{grad } \Phi \cdot \underline{\nabla}) \text{grad } \Phi. \quad (\text{A1-25})$$

Dies erfordert die Berechnung zweiter Ableitungen von  $\Phi$  an der Wand und numerisch einseitige Differenzenformeln, die große Fehler implizieren können. Aus diesem Grund wird

$$\underline{n} \cdot \text{grad } E = 0 \quad (\text{A1-26})$$

gesetzt, was für kleine Wandgeschwindigkeiten in guter Näherung und an festen Wänden wegen  $\underline{n} \cdot \text{grad } \Phi = 0$  exakt gilt. Damit folgt für das Druckfeld die Randbedingung:

$$\underline{n} \cdot \text{grad } p = - \oint_0 \underline{n} \cdot (\underline{\ddot{w}} + \alpha \underline{\dot{w}}) \quad (\text{A1-27})$$

Der durch die Näherung (A1-26) induzierte Fehler beeinflusst aber allein die damit berechneten Wandbelastungen und verschwindet bei genügend feiner Diskretisierung.

#### A1.2.2 Randbedingung an Öffnungen

An der Bruchöffnung wird der Druck

$$p = p_F(t) \quad (\text{A1-28})$$

vorgegeben.  $p_F(t) = p_1(t)$  an der Bruchöffnung;  $p_F(t) = p_0$  am oberen Deckel bei inkompressiblen Rechnungen. Zudem wird für die kinetische Energie eine Art Extremalbedingung an der Öffnung gefordert:

$$\underline{n} \cdot \text{grad } E = 0 \quad (\text{A1-29})$$

Damit folgt aus (A1-13) eine Bedingung für das Geschwindigkeits- bzw. Potentialfeld:

$$\boxed{\underline{n} \cdot \text{grad} (\dot{\Phi} + \varkappa \bar{\Phi}) = - \frac{1}{s_0} \underline{n} \cdot \text{grad} p} \quad \underline{x} \in F \quad (\text{A1-30})$$

### A1.2.3 Anfangswerte

Zur Zeit  $t=0$  sei das Fluid in Ruhe:

$$\left. \begin{array}{l} \underline{u} = 0 \\ p = p_0 \\ \dot{p} = 0 \end{array} \right\} \quad \underline{x} \in B, t=0 \quad (\text{A1-31})$$

### A1.3 Konsistenzbedingung

Zwischen der rechten Seite der Laplace-Gleichung (A1-20) für das Potential und den Randbedingungen muß wegen des Gaußschen Integralsatzes folgende Konsistenzbedingung erfüllt sein:

$$\iiint_V \text{div grad} (\dot{\Phi} + \varkappa \bar{\Phi}) dV = \iiint_V -\frac{1}{s_0 a^2} (\ddot{p} + \varkappa \dot{p}) dV \quad (\text{A1-32})$$

Die rechte Seite kann durch (A1-16) ersetzt und dann der Integralsatz

$$\iiint_V \text{div} \underline{a} = - \iint_S \underline{n} \cdot \underline{a} dS \quad (\text{A1-33})$$

angewandt werden. Dies liefert eine Beziehung zwischen den Randbedingungen

$$\iint_S \underline{n} \cdot \text{grad} (\dot{\Phi} + \varkappa \bar{\Phi}) dS = - \iint_S \frac{1}{s_0} \underline{n} \cdot \text{grad} (p + \bar{p}) dS. \quad (\text{A1-34})$$

Vergleichen wir die Integranden mit Gl. (A1-23) und (A1-24) bzw. (A1-29) und (A1-30), so folgt, daß die Gleichheit bei den gewählten Randbedingungen sichergestellt ist. Wichtig ist, daß diese Konsistenzgleichung auch nach finiter Approximation der Differentialoperatoren gewährleistet ist.



#### A1.4 Spezifikation des Reibkoeffizienten $\alpha$

Die Festlegung der Größe des Reibkoeffizienten  $\alpha$  ist sehr problematisch und wird pragmatisch im Hinblick auf ein lineares Reibmodell spezifiziert, das die turbulente Reibung im Bruchstutzen zumindest in grober Näherung erfaßt. Wegen der großen lokalen Geschwindigkeiten ist der Bruchstutzen für die Reibung ausschlaggebend.

Der üblicherweise bei Rohrströmungen (Rohrradius  $R_S$ ) verwendete Reibansatz lautet [97, S.223]

$$E = - f_{damp} \varrho |\underline{u}| \underline{u} / (4 R_S), \quad (A1-35)$$

wobei  $f_{damp}$  ein Rohrreibbeiwert ist (üblicherweise Bezeichnung  $\lambda$ ). Ein Vergleich mit (A1-10) liefert

$$\alpha = f_{damp} |\underline{u}| / (4 R_S). \quad (A1-36)$$

Anstelle der variablen Geschwindigkeit  $|\underline{u}|$  wird die maximal mögliche Ausströmungsgeschwindigkeit eingesetzt:

$$\alpha = f_{damp} [2(p_0 - p_1) / \varrho]^{1/2} / (4 R_S) \quad (A1-37)$$

Der Parameter  $f_{damp}$  ist bei einphasiger Rohrströmung bei hohen Reynoldszahlen von der Größenordnung 0,01. Er wird in FLUX2 per Eingabe festgelegt.

## Anhang 2: ZEITDISKRETISIERUNG: NEWMARK- UND ICE-TECHNIK

### A2.1 Ein allgemeines Differenzenschema für Schwingungsgleichungen bzw. zwei Gleichungen erster Ordnung

Die Strukturdynamik liefert uns Gleichungen der Form

$$\begin{aligned} M \ddot{p} + D \dot{p} + S p &= r, \\ M \neq 0, \quad D/M \geq 0, \quad S/M > 0. \end{aligned} \quad (\text{A2-1})$$

Dieser Gleichung zweiter Ordnung ist ein System erster Ordnung äquivalent:

$$\begin{aligned} \dot{p} &= q \\ M \dot{q} + D q + S p &= r \end{aligned} \quad (\text{A2-2})$$

Entsprechend kann man zwei Formen von Differenzenformeln angeben, die jedoch - wie die Differentialgleichungen - die gleiche Lösung haben. Wir definieren hierzu:

$$\begin{aligned} p^n &= p(n \cdot \Delta t), \quad r^n = r(n \cdot \Delta t) \\ q^n &= q((n-1/2) \cdot \Delta t), \quad t^n = n \cdot \Delta t \end{aligned} \quad (\text{A2-3})$$

a) Schwingungsgleichung

$$\begin{aligned} & M \frac{1}{\Delta t^2} \left\{ p^{n+1} - 2p^n + p^{n-1} \right\} \\ & + D \frac{1}{\Delta t} \left\{ \left( \frac{1}{2} + \gamma \right) (p^{n+1} - p^n) + \left( \frac{1}{2} - \gamma \right) (p^{n+1} - p^n) \right\} \\ & + S \left\{ p^n + \beta (p^{n+1} - 2p^n + p^{n-1}) + \gamma (p^{n+1} - p^{n-1}) \right\} \\ & = \left\{ r^n + \beta (r^{n+1} - 2r^n + r^{n-1}) + \gamma (r^{n+1} - r^{n-1}) \right\} \end{aligned}$$

(A2-4)

b) System von Differentialgleichungen erster Ordnung

$$\frac{1}{\Delta t} (p^{n+1} - p^n) = q^{n+1} \quad (\text{A2-5a})$$

$$\begin{aligned} & M \frac{1}{\Delta t} (q^{n+1} - q^n) \\ & + D \left\{ \left( \frac{1}{2} + \gamma \right) q^{n+1} + \left( \frac{1}{2} - \gamma \right) q^n \right\} \\ & + S \left\{ p^n + \beta \Delta t (q^{n+1} - q^n) + \gamma \Delta t (q^{n+1} + q^n) \right\} \\ & = \left\{ r^n + \beta (r^{n+1} - 2r^n + r^{n-1}) + \gamma (r^{n+1} - r^{n-1}) \right\} \end{aligned} \quad (\text{A2-5b})$$

Hierbei sind  $\beta$  und  $\gamma$  mit

$$0 \leq \beta \leq \gamma \leq 1/2 \quad (\text{A2-6})$$

freie Parameter. Für  $\beta = \gamma = 0$  ergibt sich ein explizites Verfahren. Andernfalls ist das Verfahren implizit.

Für  $\gamma = 0$  ist es identisch mit dem Newmark-Verfahren [71], insbesondere in der in [75] angegebenen Schreibweise.

Für  $\beta = \gamma = 1/2$  ist es der ICE-Technik [24] äquivalent, wie in Kap. A2.4.1 gezeigt wird. Die ICE-Technik hat sich zur Integration der kompressiblen Fluidodynamik-Gleichungen (auch mit Rotation und Zähigkeit) bewährt. Wir werden jedoch sehen, daß es eine dem Newmark-Verfahren analoge Variante gibt, die bessere Eigenschaften erwarten läßt.

Die Berücksichtigung der rechten Seite  $r$  zu verschiedenen Zeitpunkten  $n$  ist notwendig, wenn  $r$  eine lineare Funktion von  $p$  bzw. anderer Feldgrößen ist, die analogen Schwingungsgleichungen genügen.

Da (A2-5) und (A2-4) algebraisch ineinander überführbar sind, werden weiter nur die Eigenschaften der Differenzengl.

(A2-4) untersucht. Numerisch kann es aber günstiger sein, Gl. (A2-5) zu verwenden, da hier Rundungsfehler infolge Bildung von Differenzen großer Zahlen vermieden werden.

## A2.2 Stabilitätskriterien

Die Eigenwerte  $\lambda$  der Verstärkungsmatrix müssen die Stabilitätsbedingung  $|\lambda| \leq 1$  erfüllen [76\_7]. Die Eigenwerte sind die Wurzeln der charakteristischen Gleichung

$$\begin{aligned} & \left[ 1 + \left( \frac{1}{2} + \gamma \right) \alpha + (\beta + \gamma) \varsigma \right] \lambda^2 \\ & - 2 \left[ 1 + \gamma \alpha + \left( \beta - \frac{1}{2} \right) \varsigma \right] \lambda \\ & + \left[ 1 - \left( \frac{1}{2} - \gamma \right) \alpha + (\beta - \gamma) \varsigma \right] = 0, \end{aligned} \quad (\text{A2-7})$$

wobei zur Abkürzung die Definitionen

$$\alpha \equiv \frac{D \Delta t}{M}, \quad (\text{A2-8a})$$

$$\varsigma \equiv \frac{S \Delta t^2}{M} \quad (\text{A2-8b})$$

eingeführt wurden.

Die restriktivsten Bedingungen erwarten wir für das explizite Verfahren  $\beta = \gamma = 0$ :

a) Sonderfall  $\beta = \gamma = 0$  (explizites Verfahren)

In diesem Fall gilt

$$\lambda_{1/2} = \frac{1 - \varsigma/2}{1 + \alpha/2} \pm \sqrt{\frac{(1 - \varsigma/2)^2 - 1 + (\alpha/2)^2}{(1 + \alpha/2)^2}}. \quad (\text{A2-9})$$

Die größten Eigenwerte ergeben sich offenbar für den Fall  $\alpha=0$ :

$$\lambda_{1/2} = 1 - \varsigma/2 \pm \sqrt{(\varsigma/2)^2 - \varsigma} \quad (\text{A2-10})$$

Hieraus folgt, daß  $|\lambda| \leq 1$  solange  $0 < \gamma < 4$ .  
Das explizite Verfahren ist also stabil solange

$$\Delta t < 2 (M/S)^{1/2}. \quad (A2-11)$$

Die Eigenfrequenz des ungedämpften Systems ist  $\omega = (S/M)^{1/2}$ . Es gilt daher die Bedingung

$$\Delta t < 2/\omega \quad (A2-12)$$

für das explizite Verfahren.

b) Sonderfall  $\gamma=0, \alpha=0, \beta>0$  (Newmark-Verfahren)

In diesem Fall folgt aus (A2-7):

$$\lambda^2 - 2 \frac{1 + (\beta - \frac{1}{2})\gamma}{1 + \beta\gamma} \lambda + 1 = 0 \quad (A2-13)$$

Mit der Abkürzung

$$\alpha \equiv \frac{1 + (\beta - \frac{1}{2})\gamma}{1 + \beta\gamma} \quad (A2-14)$$

folgt

$$\lambda_{1/2} = \alpha \pm \sqrt{\alpha^2 - 1}. \quad (A2-15)$$

Für  $|\alpha| \leq 1$  ist die Wurzel imaginär und also

$$|\lambda| \leq 1$$

Für  $|\alpha| > 1$  dagegen ist  $|\lambda| > 1$ . Für Stabilität ist also

$$|\alpha| < 1$$

Bedingung. D.h. für  $0 \leq \beta < 1/4$  muß der Zeitschritt die Bedingung

$$\Delta t^2 \leq \frac{4M}{(1-4\beta)S} \quad (A2-16)$$

erfüllen. Für  $\beta > 1/4$  ist das Verfahren dagegen unbedingt stabil.

c) Sonderfall  $\beta = \gamma, \alpha = 0$  (ICE-Technik)

In diesem Fall folgt aus (A2-7):

$$\lambda^2 - 2 \frac{1 + (\beta - 1/2)\Delta t}{1 + 2\beta\Delta t} \lambda + \frac{1}{1 + 2\beta\Delta t} = 0 \quad (\text{A2-17})$$

Eine genauere Analyse der Wurzeln zeigt, daß das Verfahren für

$$0 \leq \beta = \gamma < 1/2$$

stabil ist, falls

$$\Delta t^2 \leq \frac{4M}{1(1-2\beta)} \quad (\text{A2-18})$$

ist. Für  $\beta = \gamma = \frac{1}{2}$  ist das Verfahren dagegen unbedingt stabil.  
(Es ist interessant, daß  $\beta = \gamma = \frac{1}{4}$  nicht unbedingt stabil ist!)

### A2.3 Genauigkeit und Wirkung der Abbruchfehler

Eine Taylorreihe um  $t^n$  liefert mit  $p = p^n$ :

$$\frac{1}{\Delta t^2} (p^{n+1} - 2p^n + p^{n-1}) = \ddot{p} + \frac{2}{4!} \Delta t^2 \ddot{\ddot{p}} + \dots$$

$$\frac{1}{2\Delta t} (p^{n+1} - p^{n-1}) = \dot{p} + \frac{1}{3!} \Delta t^2 \ddot{\ddot{p}} + \dots$$

$$\frac{1}{\Delta t} (p^{n+1} - p^n) = \dot{p} + \frac{1}{2!} \Delta t \ddot{p} + \frac{1}{3!} \Delta t^2 \ddot{\ddot{p}} + \dots$$

(A2-19)

Einsetzen in die Differenzengleichung (A2-4) ergibt:

$$\begin{aligned}
 & (M + \gamma \Delta t D + \beta \Delta t^2 S) \ddot{p} \\
 & + (D + 2\gamma \Delta t S) \dot{p} \\
 & + S p \\
 & + \frac{\Delta t^2}{12} M \dddot{p} + \frac{\Delta t^2}{6} D \ddot{p} \\
 & = \gamma + 2\gamma \Delta t \dot{\gamma} + \beta \Delta t^2 \ddot{\gamma}
 \end{aligned}
 \tag{A2-20}$$

Man erkennt:

- Die Differenzenformel ist genau von der Ordnung  $\Delta t$ , falls  $\gamma > 0$  und von der Ordnung  $\Delta t^2$ , falls  $\gamma = 0, \beta > 0$ . Beim expliziten Verfahren treten Terme mit dritten und vierten Ableitungen auf.
- Ein implizites Verfahren mit  $\beta > 0$  bewirkt eine numerisch größer erscheinende Schwingungsmasse und folglich größere Schwingungszeiten, wobei der Effekt um so größer ist je größer  $\beta \Delta t^2 S / M$
- Ein implizites Verfahren mit  $\beta = \gamma > 0$  hat zusätzlich zu dem Effekt der vergrößerten Masse eine numerisch bedingte Dämpfung zur Folge, deren Einfluß um so größer ist je größer  $\gamma \Delta t^2 S / M$ , d.h. je größer die Eigenfrequenzen des ungedämpften Systems sind.

Das Schwingungsverhalten für  $D=0$  der beiden Verfahren läßt sich durch Abb. A2-1 charakterisieren.

Dies gilt für den Fall vorgegebener Anfangsauslegung ohne äußere Kräfte. Wenn man dagegen nach der Reaktion auf eine periodische Kraft  $\sim \cos(\omega t)$  fragt, so erhält man für  $\omega \Delta t \rightarrow \infty$  bei impliziter Rechnung wegen der vergrößerten effektiven Masse eine geringere Amplitude  $P$  in  $p = P \cos(\omega t - \varphi)$  als bei expliziter

Rechnung. Bezüglich der Übertragungsfunktion wirken positive Werte von  $\beta$  und  $\gamma$  also stets dämpfend.

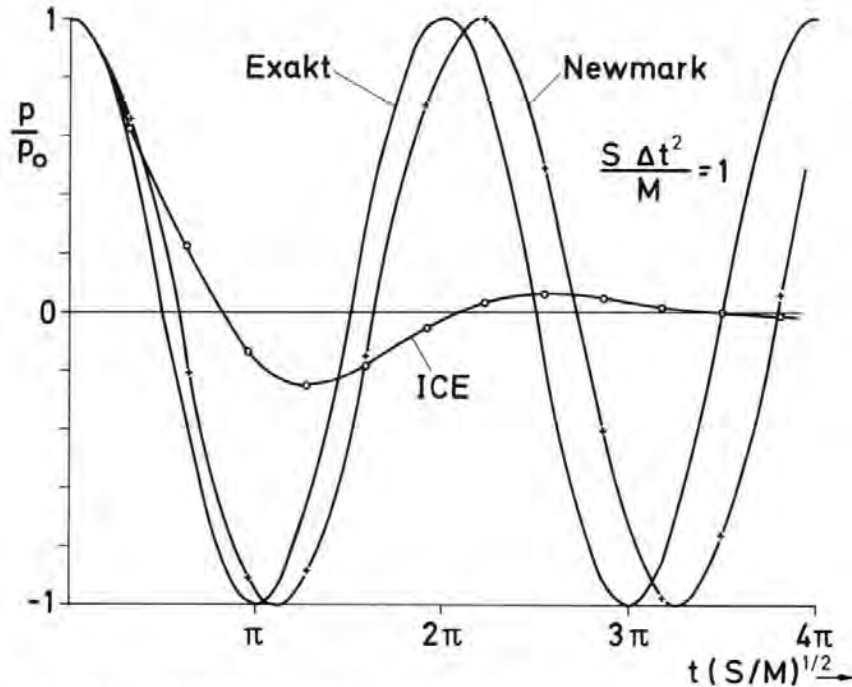


Abb. A2-1: Schwingungsverhalten bei verschiedenen Differenzenformeln

#### A2.4 Das Differenzenverfahren im Lichte impliziter Verfahren zur Lösung fluiddynamischer Gleichungen

Es soll hier gezeigt werden, daß die ICE-Technik [24] dem vorliegenden Differenzenverfahren mit  $\beta = \gamma = \frac{1}{2}$  entspricht - mit allen seinen Nachteilen. Es wird zudem gezeigt, daß eine alternative Technik zur Integration der fluiddynamischen Gleichungen dem Newmark-Verfahren mit  $\beta = \frac{1}{4}$ ,  $\gamma = 0$  entspricht und daher gegenüber der ICE-Technik Vorteile besitzt, ohne die Eigenschaft unbedingter Stabilität zu verlieren.

##### A2.4.1 Identifikation der ICE-Technik mit $\beta = \gamma = \frac{1}{2}$

Die Differenzengleichungen der ICE-Technik lauten im akustischen Fall:

$$[(su)^{n+1} - (su)^n] / \Delta t = -grad(p^{n+1}) \quad (A2-21)$$



$$[s^{n+1} - s^n]/\Delta t + \operatorname{div}[(su)^{n+1}] = 0 \quad (\text{A2-22})$$

Wir schreiben (A2-22) noch einmal an für das vorhergehende Zeitniveau:

$$[s^n - s^{n-1}]/\Delta t + \operatorname{div}[(su)^n] = 0 \quad (\text{A2-23})$$

Sodann subtrahieren wir Gl. (A2-23) von (A2-22) und dividieren durch  $\Delta t$ :

$$\frac{s^{n+1} - 2s^n + s^{n-1}}{\Delta t^2} + \operatorname{div} \left[ \frac{(su)^{n+1} - (su)^n}{\Delta t} \right] = 0 \quad (\text{A2-24})$$

Setzen wir nun  $s = p/\alpha^2$  und beachten Gl. (A2-21), so folgt

$$\frac{p^{n+1} - 2p^n + p^{n-1}}{\alpha^2 \Delta t^2} - \operatorname{div} \operatorname{grad} (p^{n+1}) = 0. \quad (\text{A2-25})$$

Dies entspricht (A2-4) für  $D=0$ ,  $M=1/\alpha^2$ ,  $S=-\operatorname{div} \operatorname{grad}$ ,  $r=0$  und  $\beta = \gamma = 1/2$ .

#### A2.4.2 Zentrale Fluid-Differenzen-Gleichung analog dem Newmark-Verfahren

Die gleiche Vorgehensweise wie in A2.4.1 ergibt, daß folgende Fluid-Differenzen-Gleichungen die gleichen Eigenschaften besitzen wie das Newmark-Verfahren für  $\beta = 1/4$ ,  $\gamma = 0$ :

$$[(su)^{n+1} - (su)^n]/\Delta t = -\frac{1}{2} \operatorname{grad} (p^{n+1} + p^n) \quad (\text{A2-26})$$

$$[s^{n+1} - s^n]/\Delta t + \frac{1}{2} \operatorname{div} [(su)^{n+1} + (su)^n] = 0 \quad (\text{A2-27})$$

Es muß eingeräumt werden, daß in der ursprünglichen Beschreibung der ICE-Technik [24] Gewichte  $\theta$  und  $(1-\theta)$  eingeführt wurden, mit denen die Größen bei  $(n+1)$  und  $(n)$  eingehen. Jedoch ist in den späteren Anwendungen, wie den

Rechenprogrammen KACHINA, SOLA-ICE, YAQUI und SIMMER (siehe diverse Los Alamos Reports) der freie Parameter  $\theta$  stets durch den Wert eins ersetzt worden.

Als Schlußfolgerung empfehlen wir für die Schwingungsgleichung (A2-1) die Newmark-Gleichungen (A2-4) mit  $\beta = 1/4$ ,  $\gamma = 0$  und für fluiddynamische Simulationen Gleichungen entsprechend (A2-26) und (A2-27).

### Anhang 3: EINZELHEITEN DER ÖRTLICHEN DISKRETISIERUNG

#### A3.1 Die Kosinus-transformierte Helmholtzgleichung

##### A3.1.1 Diskrete Kosinus-Transformation

Wenn  $p(\varphi)$ , wie z.B. das gesuchte Druckfeld, eine gerade, periodische Funktion des Winkels  $\varphi$  ist, d.h.

$$p(\varphi) = p(-\varphi), \quad p(\varphi + 2\pi) = p(\varphi), \quad (\text{A3-1})$$

und

$$\varphi_j = j\pi/K, \quad j = 0, 1, \dots, K, \quad (\text{A3-2})$$

diskrete Winkelwerte sind, an denen wir die diskreten Funktionswerte  $p_j$  definieren, dann kann  $p_j$  in Form einer diskreten Kosinus-Reihe

$$p_j = \sum_{k=0}^K b_k \hat{p}_k \cos(\pi k j / K) \quad (\text{A3-3})$$

dargestellt werden, wobei

$$b_k = \begin{cases} 1/2 & \text{für } k = 0, K \\ 1 & \text{für } 1 \leq k < K. \end{cases} \quad (\text{A3-4})$$

Mit

$$T_{j,k} \equiv b_k \cos(\pi k j / K) \quad (\text{A3-5})$$

kann diese Beziehung unter Ausnutzung der Summationskonvention auch als

$$p_j = T_{j,k} \hat{p}_k \quad (\text{A3-6})$$

geschrieben werden. Die Umkehrung

$$\hat{p}_k = T'_{k,j} p_j, \quad (\text{A3-7})$$

$$T'_{k,j} \equiv b_j \cos(\pi k j / K) (2/K) \quad (\text{A3-8})$$

ist eine Konsequenz der Orthogonalitätsrelation [92\_7]

$$T'_{m,j} T_{j,n} = \delta_{m,n} . \quad (\text{A3-9})$$

#### A3.1.2 Diskrete Approximation der Umfangsableitungen

Es werden zwei Ansätze zur diskreten Approximation der beiden ersten Ableitungen von  $p(\varphi)$  nach  $\varphi$  verwandt. (Die erste Ableitung wird bei der Berechnung des Geschwindigkeitsfeldes aus dem Potentialfeld benötigt.)

##### a) Approximation durch finite Differenzen

Eine Taylor-Reihen-Entwicklung liefert für eine dreimal differenzierbare Funktion  $p(\varphi)$  die bekannten Formeln:

$$\frac{\partial p}{\partial \varphi}(\varphi_j) = \frac{p_{j+1} - p_{j-1}}{2 \Delta \varphi} + O(\Delta \varphi^2) \quad (\text{A3-10})$$

$$\frac{\partial^2 p}{\partial \varphi^2}(\varphi_j) = \frac{p_{j+1} - 2p_j + p_{j-1}}{\Delta \varphi^2} + O(\Delta \varphi^2) \quad (\text{A3-11})$$

Die Restterme von der Ordnung  $\Delta \varphi^2$  werden vernachlässigt.

##### b) Spektrale Approximation

Aus der Kosinus-Reihe

$$p(\varphi) = \sum_{k=0}^K b_k \hat{p}_k \cos(k \varphi) + R(\varphi) \quad (\text{A3-12})$$

mit Modes  $\hat{p}_k$  gemäß (A3-7) und einem Restglied  $R(\varphi)$ , das für  $K \rightarrow \infty$  verschwinden würde, erhält man:

$$\frac{\partial p}{\partial \varphi}(\varphi_j) = \sum_{k=0}^K -b_k k \hat{p}_k \sin(\pi j k / K) + R'(\varphi) \quad (\text{A3-13})$$

$$\frac{\partial^2 p}{\partial \varphi^2}(\varphi_j) = \sum_{R=0}^K -b_R R^2 \hat{p}_R \cos(\pi j R/K) + R''(\varphi_j) \quad (\text{A3-14})$$

Falls  $p(\varphi)$  N-mal stetig differenzierbar ist, ist [79\_]:

$$R'(\varphi_j) = O(\Delta \varphi^N) \quad (\text{A3-15})$$

$$R''(\varphi_j) = O(\Delta \varphi^{N-1}), \quad N \leq K \quad (\text{A3-16})$$

Diese Restterme werden in der finiten Approximation vernachlässigt.

Für beide Approximationsformen lassen sich die Ableitungen als

$$\frac{\partial p}{\partial \varphi}(\varphi_j) \approx \Delta_{j,e}^{(1)} p_e, \quad (\text{A3-17})$$

$$\frac{\partial^2 p}{\partial \varphi^2}(\varphi_j) \approx \Delta_{j,e}^{(2)} p_e \quad (\text{A3-18})$$

schreiben, wobei im Falle der Approximation durch finite Differenzen die Matrizen  $\underline{\Delta}^{(n)}$  gegeben sind als

$$\Delta_{j,e}^{(1)} = \begin{cases} \frac{2K}{\pi} (\delta_{j+1,e} - \delta_{j-1,e}), & 1 \leq j < K, \\ 0 & j=0, K, \end{cases} \quad (\text{A3-19'})$$

$$\Delta_{j,e}^{(2)} = \begin{cases} \frac{K^2}{\pi^2} (\delta_{j+1,e} - 2\delta_{j,e} + \delta_{j-1,e}), & 1 \leq j < K, \\ \frac{K^2}{\pi^2} 2(\delta_{j+1,e} - \delta_{j,e}), & j=0, \\ \frac{K^2}{\pi^2} 2(\delta_{j,e} - \delta_{j-1,e}), & j=K, \end{cases} \quad (\text{A3-20'})$$

und im Falle der spektralen Approximation

$$\Delta_{j,\ell}^{(1)} = \sum_{m=0}^K -m \sin\left(\frac{\pi j m}{K}\right) \frac{2}{K} b_\ell \cos\left(\frac{\pi \ell m}{K}\right), \quad (\text{A3-19''})$$

$$\Delta_{j,\ell}^{(2)} = \sum_{m=0}^K -b_m m^2 \cos\left(\frac{\pi j m}{K}\right) \frac{2}{K} b_\ell \cos\left(\frac{\pi \ell m}{K}\right), \quad (\text{A3-20''})$$

für  $j = 0, 1, \dots, K$  ;  $\ell = 0, 1, \dots, K$ .

### A3.1.3 Kosinus-transformierte Helmholtz-Gleichung

Zu lösen ist die Helmholtz-Gleichung (2-43)

$$\nabla^2 \rho + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \rho}{\partial \varphi^2} - \lambda^2 \rho = q(r, z, \varphi) \quad (\text{A3-21})$$

in dem dreidimensionalen Koordinatensystem  $(r, z, \varphi)$ .

$$\nabla^2 \rho \equiv \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial \rho}{\partial r} \right) + \frac{\partial^2 \rho}{\partial z^2} \quad (\text{A3-22})$$

Nach Einführung der obigen Approximation für  $\partial^2 \rho / \partial \varphi^2$  erhalten wir für

$$\rho_j = \rho_j(r, z) \equiv \rho(r, z, \varphi_j) \quad (\text{A3-23})$$

ein gekoppeltes System von Helmholtz-Gleichungen in zwei Dimensionen  $(r, z)$ :

$$\nabla^2 \rho_j + \frac{1}{r^2} \Delta_{j,\ell}^{(2)} \rho_\ell - \lambda^2 \rho_j = q_j(r, z),$$

$$j = 0, 1, \dots, K. \quad (\text{A3-24})$$

Ersetzen wir die  $\rho_j$  durch den Ansatz (A3-6), multiplizieren mit  $T'_{k,j}$  von links und beachten die Orthogonalität (A3-9), so erhalten wir

$$\nabla^2 \hat{p}_k - (\lambda_k^2 / \tau^2 + \lambda^2) \hat{p}_k = \hat{q}_k(\tau, z) \quad (\text{A3-25})$$

$$\equiv T'_{k,j} q(\tau, z, \varphi_j)$$

$$k = 0, 1, \dots, K$$

mit

$$\lambda_k^2 = \begin{cases} 2 (K/\pi)^2 [1 - \cos(k\pi/K)], \\ \text{bei finiten Differenzen.} \\ \\ k^2, \\ \text{bei spektraler Approximation.} \end{cases} \quad (\text{A3-26})$$

Die Kosinus-Transformation liefert also ein entkoppeltes System von 2D Helmholtz-Gleichungen für jeden Kosinus-Mode  $\hat{p}_k$ .

Analog werden die Randbedingungen transformiert, so daß

$$\underline{n} \cdot \underline{g} + \alpha d \hat{p}_k = \hat{g}_{W,k} \equiv T'_{k,j} g_W(\varphi_j) \quad (\text{A3-27a})$$

an elastischen inneren Wänden,

$$\underline{n} \cdot \underline{g} + \alpha d \hat{p}_k = \hat{g}_{D,k} \equiv T'_{k,j} g_D(\varphi_j) \quad (\text{A3-27b})$$

an der Druckbehälterwand

und

$$\hat{p}_k = \hat{p}_k^0 \equiv T'_{k,j} p_0(\varphi_j) \quad (\text{A3-28})$$

an Öffnungen.

## A3.2 Finite Differenzen-Approximation der zweidimensionalen (2D) Helmholtz-Gleichung

### A3.2.1 Feldgleichung

Die  $\tau$ - $z$ -Ebene durch die Achse des Druckbehälters wird mit einem Maschennetz abgedeckt, vergl. Abb. 2-3, das so konstruiert ist,

daß Wände mit Maschenlinien zusammenfallen. D.h., aufgrund der Druckbehälter- und Kernmantelgeometrie werden die Radien  $r_{i+1/2}$ ,  $i = 0, 1, \dots, MVS$  sowie die axialen Koordinaten  $z_{j+1/2}$ ,  $j = NV-1, \dots, NL$  monoton steigend festgelegt. Hieraus errechnet man:

$$r_i = \frac{1}{2} (r_{i+1/2} + r_{i-1/2}), \quad i = 1, 2, \dots, MVS$$

$$r_{-1/2} = r_0 = 0$$

$$\Delta r_i = r_{i+1/2} - r_{i-1/2}, \quad i = 1, 2, \dots, MVS$$

$$\Delta r_{i+1/2} = r_{i+1} - r_i, \quad i = 0, 1, \dots, MVS-1 \quad (A3-29)$$

$$z_j = \frac{1}{2} (z_{j+1/2} + z_{j-1/2}), \quad j = NV, \dots, NL$$

$$\Delta z_j = z_{j+1/2} - z_{j-1/2}, \quad j = NV, \dots, NL$$

$$\Delta z_{j+1/2} = z_{j+1} - z_j, \quad j = NV, \dots, NL-1$$

Sodann integriert man die Differentialgleichung (A3-25) über die Maschenvolumina

$$V_{ij} = \int_{r_{i-1/2}}^{r_{i+1/2}} \int_{z_{j-1/2}}^{z_{j+1/2}} r \, dr \, dz \quad (A3-30)$$



und beachtet den Gaußschen Integralsatz:

$$\begin{aligned}
 & \iint_{V_{ij}} \left( \nabla^2 \hat{p}_k(\tau, z) - \hat{\lambda}_k^2 \hat{p}_k \right) \tau \, d\tau \, dz \\
 &= - \oint_{S_{ij}} \underline{n} \cdot \text{grad } \hat{p}_k(\tau, z) \, dS - \iint_{V_{ij}} \lambda_k^2 \hat{p}_k \, \tau \, d\tau \, dz \\
 &= \iint_{V_{ij}} \hat{q}_k(\tau, z) \, \tau \, d\tau \, dz
 \end{aligned} \tag{A3-31}$$

Hierbei wurde die Abkürzung  $\hat{\lambda}_k^2 \equiv \lambda_k^2 / \tau^2 + \lambda^2$  verwandt. Das Integral über die Oberfläche  $S_{ij}$  der Masche teilen wir auf in die Summe der Integrale über die geraden Randstücke der viereckigen Maschen. Sodann definieren wir die diskreten Werte  $\hat{p}_{ijk}$  und  $\hat{q}_{ijk}$  als die Maschenmittelwerte:

$$\hat{p}_{ijk} \equiv \frac{1}{V_{ij}} \iint_{V_{ij}} \hat{p}_k(\tau, z) \, \tau \, d\tau \, dz \tag{A3-32}$$

$$\hat{q}_{ijk} \equiv \frac{1}{V_{ij}} \iint_{V_{ij}} \hat{q}_k(\tau, z) \, \tau \, d\tau \, dz \tag{A3-33}$$

Ebenso werden Mittelwerte der Normalenableitungen definiert

$$\hat{g}_{(i+1/2)jk}^{\tau} \equiv \frac{1}{\Delta z_j} \int_{z_{j-1/2}}^{z_{j+1/2}} \frac{\partial \hat{p}_k(\tau, z)}{\partial \tau} \, dz, \tag{A3-34}$$

$$\hat{g}_{i(j+1/2)k}^z \equiv \frac{2}{\tau_{i+\frac{1}{2}}^2 - \tau_{i-\frac{1}{2}}^2} \int_{\tau_{i-\frac{1}{2}}}^{\tau_{i+\frac{1}{2}}} \tau \frac{\partial \hat{p}_k(\tau, z_{j+\frac{1}{2}})}{\partial z} \, d\tau, \tag{A3-35}$$

und näherungsweise wird gesetzt

$$\frac{1}{V_{ij}} \iint \frac{\hat{\lambda}_k^2}{V_{ij}} \hat{p}_k(t, z) r \, dr \, dz \approx \begin{cases} \hat{\lambda}_k^2(t_i) \hat{p}_{ijk}, & i > 0 \\ \lambda^2 \hat{p}_{0jk}, & i = 0. \end{cases} \quad (\text{A3-36})$$

Für  $i=0, k>0$  wurde dabei die Endlichkeitsbedingung

$$\lim_{t \rightarrow 0} [\hat{p}_k(t)/t^2] = 0 \quad \text{beachtet.}$$

Nach Division durch  $V_{ij}$  liefert dann (A3-31):

a) für  $i > 0$ :

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\tau_i \Delta \tau_i} \left[ \tau_{i+1/2} \hat{g}_{(i+\frac{1}{2})jk}^{\tau} - \tau_{i-1/2} \hat{g}_{(i-\frac{1}{2})jk}^{\tau} \right] \\ & + \frac{1}{\Delta z_j} \left[ \hat{g}_{i(j+1/2)k}^z - \hat{g}_{i(j-1/2)k}^z \right] \\ & - \left( \lambda^2 + \lambda_k^2 / \tau_i^2 \right) \hat{p}_{ijk} = \hat{q}_{ijk} \end{aligned} \quad (\text{A3-37})$$

b) für  $i = 0$ :

$$\begin{aligned} & \frac{2}{\tau_{1/2}} \hat{g}_{\frac{1}{2}jk}^{\tau} + \frac{1}{\Delta z_j} \left[ \hat{g}_{0(j+\frac{1}{2})k}^z - \hat{g}_{0(j-\frac{1}{2})k}^z \right] \\ & - \lambda^2 \hat{p}_{0jk} = \hat{q}_{0jk} \end{aligned} \quad (\text{A3-38})$$

In dieser Form gelten die Gleichungen sowohl für innere Maschen als auch für solche, die an Wände stoßen. Einzig in (A3-36) wurde bisher eine Näherung benutzt.

Abseits von Wänden wird weiter im Sinne einer Differenzenapproximation zweiter Ordnung gesetzt:

$$\begin{aligned} \hat{g}_{(i+\frac{1}{2})jk}^{\tau} &= \frac{1}{\Delta \tau_{i+\frac{1}{2}}} \left( \hat{p}_{(i+1)jk} - \hat{p}_{ijk} \right) \\ \hat{g}_{i(j+\frac{1}{2})k}^z &= \frac{1}{\Delta z_{j+\frac{1}{2}}} \left( \hat{p}_{i(j+1)k} - \hat{p}_{ijk} \right) \end{aligned} \quad (\text{A3-39})$$

Hieraus entsteht schließlich die gesuchte Differenzengleichung für innere Fluidmaschen:

a)  $i > 0$

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\tau_i \Delta \tau_i} \left[ \frac{\tau_{i+1/2}}{\Delta \tau_{i+1/2}} \left( \hat{p}_{(i+1)jk} - \hat{p}_{ijk} \right) \right. \\ & \quad \left. - \frac{\tau_{i-1/2}}{\Delta \tau_{i-1/2}} \left( \hat{p}_{ijk} - \hat{p}_{(i-1)jk} \right) \right] \\ & + \frac{1}{\Delta z_j} \left[ \frac{1}{\Delta z_{j+1/2}} \left( \hat{p}_{i(j+1)k} - \hat{p}_{ijk} \right) \right. \\ & \quad \left. - \frac{1}{\Delta z_{j-1/2}} \left( \hat{p}_{ijk} - \hat{p}_{i(j-1)k} \right) \right] \\ & - \left[ \frac{\lambda_R^2}{\tau_i^2} + \lambda^2 \right] \hat{p}_{ijk} = \hat{g}_{ijk} \end{aligned} \quad (\text{A3-40a})$$

b)  $i = 0, k = 0$

$$\begin{aligned} & \frac{2}{r_{1/2} \Delta r_{1/2}} \left( \hat{p}_{1jk} - \hat{p}_{0jk} \right) - \lambda^2 \hat{p}_{0jk} \\ & + \frac{1}{\Delta z_j} \left[ \frac{1}{\Delta z_{j+1/2}} \left( \hat{p}_{0(j+1)k} - \hat{p}_{0jk} \right) \right. \\ & \left. - \frac{1}{\Delta z_{j-1/2}} \left( \hat{p}_{0jk} - \hat{p}_{0(j-1)k} \right) \right] = \hat{q}_{0jk} \end{aligned} \quad (\text{A3-40b})$$

### A3.2.2 Symmetrielinien-Randbedingung

Die stetige Funktion  $p(\tau, z, \varphi)$  nähert sich für  $\tau \rightarrow 0$  einer Konstanten, dem Wert  $p(0, z)$  auf der Symmetrielinie. Die Fouriertransformation liefert daher die Dirichlet-Randbedingung

$$\hat{p}_k(\tau, z) = 0 \quad \text{für } \tau = 0, k > 0. \quad (\text{A3-41})$$

Für  $k = 0$  ist dagegen (A3-40b) zur Bestimmung von  $\hat{p}_0(\tau, z)$  für  $\tau = 0$  anzuwenden. Gl. (A3-40b) ist dem Typ nach eine Neumann-Randbedingung.

### A3.2.3 Randbedingung an Öffnungen

Bezüglich des 2D-Problems wird in FLUX nur bei den inkompressiblen Rechnungen eine Öffnung, und zwar am oberen Deckel (bei  $j = NU - 1$ ) vorgesehen. Hier kann ein Randdruck  $\hat{p}_{ik}^0$  vorgegeben werden. Für  $j = NU$  sind also die in (A3-40) auftretenden Werte  $\hat{p}_{i(j-1)k}$  bekannt und können der rechten Seite zugeschlagen werden. Anstelle von  $\hat{q}_{ijk}$  lautet die rechte Seite

$$\hat{q}_{ijk} = \frac{1}{\Delta z_j \Delta z_{j-1/2}} \hat{p}_{ik}^0 \quad \text{für } j = NU. \quad (\text{A3-42})$$

#### A3.2.4 Druckgradient an Wänden

Ein wesentlicher Vorteil des verwendeten Maschennetzes ist die Tatsache, daß die an Wänden vorgegebenen Normalenableitungen bzw. deren diskreten Kosinusmodes  $\hat{g}_{w,k}$  unmittelbar in den Feldgleichungen (A3-37,38) eingesetzt werden können. Beispielsweise wird an der inneren Kernmantelwand ( $i=MM$ ) gesetzt

$$\hat{g}_{(i+1/2)j,k}^r = \hat{g}_{w,k}(z_j) \equiv \hat{g}_{w,j,k}^j \quad (\text{A3-43})$$

das heißt, es wird der von der Struktur her vorgegebene Gradient im Maschenmittelpunkt übernommen. Gleiches gilt für den Gradienten  $g_D$  an der Druckbehälterwand einschließlich der Grenzfläche zum Rohr am Stutzen.

#### A3.2.5 Druckgradient an durchlöcherter Wänden

In den betrachteten Fällen treten durchlöcherter Wände nur an der oberen Begrenzung des Ringraums, also am Kernmantelflansch auf. Darüber hinaus sind durchlöcherter Wände in Form von Siebplatten oder auch perforierten Kernmänteln in vielen Druckbehältern denkbar, werden aber im vorliegenden Programm nicht erfaßt.

Bezüglich des oberen Flansches betrachten wir die Situation gemäß folgender Skizze.

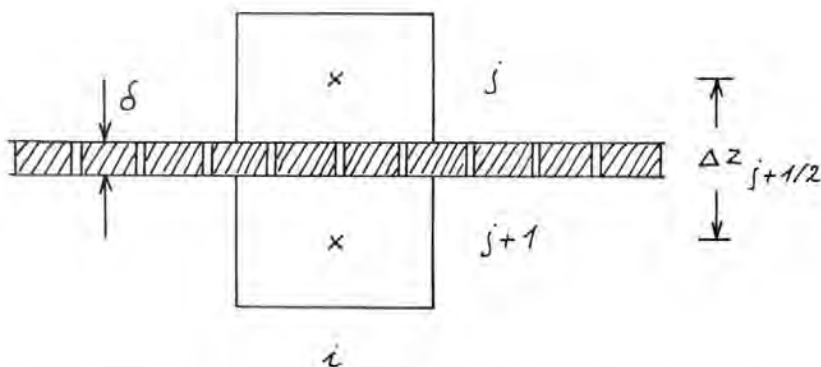


Abb.A3-1: Durchlöcherter Wand mit Nachbar-Maschen

Der Anteil  $\theta$  der Wandfläche sei durchlöchert. D.h. für den Gradienten

$\hat{g}_{i(j+1/2)k}^z$   
gilt

$$\hat{g}_{i(j+1/2)k}^z = \theta \hat{g}_{\text{Loch},ik}^z + (1-\theta) \hat{g}_{\text{Wand},ik}^z, \quad (\text{A3-44})$$

wobei  $\hat{g}_{\text{Wand},ik}^z$  bei starrer Wand gleich Null ist. Für den Gradienten-Anteil am Loch wird gesetzt

$$\hat{g}_{\text{Loch},ik}^z = \frac{1}{\Delta z_{j+1/2}} \left( \hat{p}_{i(j+1)k} - \hat{p}_{ijsk} \right), \quad (\text{A3-45})$$

womit Druckverluste infolge Reibung oder Trägheit des Fluids in den Löchern außer acht blieben. Letzteres ist akzeptabel solange

$\sigma \ll \Delta z_{j+1/2}$ . Eine genauere Betrachtungsweise, z.B. gemäß [80\_7], erfordert die Einführung empirischer Koeffizienten. Da hier, insbesondere beim HDR, durchlöchernte Wände weitgehend fehlen und in jedem Fall  $\theta$  klein ist, wird auf derartige, aufwendigere Modelle verzichtet.

### A3.3 Finite Differenzen-Approximation der Helmholtzgleichung im Rohr (1D)

Wenn  $p_s(r)$  und  $q_s(r)$  die Mittelwerte des (Druck-) Feldes und Quellfeldes über den Rohrquerschnitt sind, dann lautet die 1D-Helmholtzgleichung

$$\frac{\partial^2 p_s}{\partial r^2} - \lambda^2 p_s = q_s(r), \quad (\text{A3-46})$$

wobei die mit  $r$  bezeichnete "radiale" Koordinate eigentlich einer kartesischen Koordinate entspricht.

Formale Integration über eine Masche im Stutzen gemäß Abb. 2-3 liefert

$$\frac{1}{\Delta \tau_i} \left( g_{i+1/2}^s - g_{i-1/2}^s \right) - \lambda^2 p_{s,i} = q_{s,i} \quad (\text{A3-47})$$

$$i = MV+1, \dots, MV+MS,$$

wobei

$$g_{i+1/2}^S \equiv \frac{\partial p_S}{\partial \tau} (\tau_{i+1/2}),$$

$$p_{S,i} \equiv \frac{1}{\Delta \tau_i} \int_{\tau_{i-1/2}}^{\tau_{i+1/2}} p_S(\tau) d\tau,$$

$$q_{S,i} \equiv \frac{1}{\Delta \tau_i} \int_{\tau_{i-1/2}}^{\tau_{i+1/2}} q_S(\tau) d\tau.$$

Die Gradienten  $g^S$  werden mittels finiter Differenzen approximiert:

$$g_{i+1/2}^S \approx \frac{1}{\Delta \tau_{i+1/2}} (p_{S,i+1} - p_{S,i}) \quad (A3-48)$$

$i = MV, MV+1, \dots, MV+MS,$

wobei die "Randwerte"  $p_{S,MV+MS} = p_A$  und  $p_{S,MV} = p_D$  zu spezifizieren sind. Dies liefert schließlich das Gleichungssystem

$$\frac{1}{\Delta \tau_i} \left[ \frac{1}{\Delta \tau_{i+1/2}} (p_{S,i+1} - p_{S,i}) \right. \quad (A3-49)$$

$$\left. - \frac{1}{\Delta \tau_{i-1/2}} (p_{S,i} - p_{S,i-1}) \right]$$

$$- \lambda^2 p_{S,i} = q_{S,i}$$

$$i = MV+1, MV+2, \dots, MV+MS,$$

### A3.4 Die normale Strukturverformung an diskreten Orten - Vorwärtstransformation

In § 2.6.1 wurde die Vorwärtstransformationsmatrix  $\underline{\hat{V}}_R = [\hat{V}_{j,m}^{(k)}]$  eingeführt. Hier werden die Werte dieser Matrix spezifiziert. Die Grundlage hierzu bilden Abb. 2-5 sowie Gl. (2-55, 56, 14).

Wir unterscheiden drei Bereiche:

- 1)  $(j = 1, 2, \dots, NM) \& (k > 0)$   
und  $(j = 1, 2, \dots, NM - NR) \& k = 0$
- 2)  $(j = NM - NR + 1, \dots, NM) \& (k = 0)$
- 3)  $(j = NM + 1, \dots, NM + MR) \& (k \geq 0)$   
 $k = 0, 1, \dots, K$

Im "normalen" Bereich 1) gilt:

$$\hat{V}_{j,m}^{(k)} = \begin{cases} 0 & , m = 1, 2, 4, 5, \dots, 3M-2, 3M-1 \\ & \text{(axial und azimuthal)} \\ \frac{1}{b_R} F_{m/3}^{(k)}(z_j) & , m = 3, 6, \dots, 3M \\ & \text{(radial)} \end{cases} \quad (\text{A3-50a})$$

Im Bereich 2) wird

$$\hat{V}_{j,m}^{(k)} = 0 \quad (\text{A3-50b})$$

gesetzt. Diese Festlegung ist aus Konsistenzgründen am Massering für den nullten Kosinusmode erforderlich. Wenn  $V_{j,m}^{(n)}$  hier von Null verschieden wäre, dann würde das einem Aufweiten des starren Ringes entsprechen (Widerspruch!). Diese Aufweitung impliziert eine Volumenänderung, die zu einer Verletzung der Konsistenzbedingung (A1-32 bis 34) führen würde.



Im Bereich 3) wird  $\hat{V}_{j,m}^{(k)} = 0$  gesetzt, falls der Programm-Eingabeparameter  $BRING = 'O'B$  gesetzt ist. Andernfalls wird gesetzt

$$\hat{V}_{j,m}^{(k)} = \begin{cases} 0 \text{ für } m = 2, 3, 5, 6, \dots, 3M-1, 3M \\ \text{(azimutale und radiale Modes)} \\ \frac{1}{b_k} F_{(m+2)/3}^{(k)}(L_M), m = 1, 4, \dots, 3M-2 \\ \text{(axialer Mode).} \end{cases} \quad (A3-50c)$$

Da diese Formeln von  $j$  unabhängig sind, wird im Programm der Index  $j$  statt von  $NM+1$  bis  $NM+MR$  nur bis  $NM+1$  variiert.

#### A3.5 Diskrete Berechnung des Geschwindigkeits- und Energiefeldes

Wenn das Potential  $\bar{\Phi}_{i,j,k}$  an den diskreten Maschenorten bekannt ist, kann hieraus das Geschwindigkeitsfeld  $\underline{u} = (u_r, u_z, u_\varphi)$  an diskreten Orten gemäß Abb. 2-6 wie folgt bestimmt werden. In der  $r$ - $z$ -Ebene werden finite Differenzen verwendet:

$$u_{r, (i+1/2)j,k} = \frac{1}{\Delta r_{i+1/2}} \left( \bar{\Phi}_{(i+1)j,k} - \bar{\Phi}_{i,j,k} \right) \quad (A3-51)$$

$$u_{z, i(j+1/2)k} = \frac{1}{\Delta z_{j+1/2}} \left( \bar{\Phi}_{i(j+1)k} - \bar{\Phi}_{i,j,k} \right) \quad (A3-52)$$

Bezüglich der  $\varphi$ -Komponente werden die Ableitungen gemäß (A3-17) bestimmt:

$$u_{\varphi, i,j,k} = \sum_{\ell=0}^K \Delta_{k,\ell}^{(1)} \bar{\Phi}_{i,j,\ell} \quad (A3-53)$$

$$= S_{k,m} \mu^{(m)} T'_{m,\ell} \bar{\Phi}_{i,j,\ell} \quad (A3-54)$$

mit

$$\mu^{(m)} = \begin{cases} -(K/\pi) \sin(\pi m/K) \\ \text{bei finiten Differenzen} \\ -m \\ \text{bei spektraler Approximation,} \end{cases} \quad (\text{A3-55})$$

und

$$S_{K,j} = \sin(\pi j K / K). \quad (\text{A3-56})$$

Aus dem Ergebnis kann punktweise die spezifische kinetische Energie in den Maschenmittelpunkten berechnet werden:

$$E_{ijk} = \frac{S}{2} \left[ \frac{1}{2} \left( u_{T,(i+1/2)jk}^2 + u_{T,(i-1/2)jk}^2 \right) + \frac{1}{2} \left( u_{Z,i(j+1/2)k}^2 + u_{Z,i(j-1/2)k}^2 \right) + u_{\varphi,ijk}^2 \right] \quad (\text{A3-57})$$

Anhang 4: HAUPTACHSENTTRANSFORMATION UND BEHANDLUNG VON DÄMPFUNG

A4.1 Die Transformation für dämpfungsfreie Fälle

Die dämpfungsfreie Schwingungsgleichung

$$\underline{\underline{M}} \ddot{\underline{\underline{c}}} + \underline{\underline{S}} \underline{\underline{c}} = \underline{\underline{g}} \quad (\text{A4-1})$$

für ein System mit  $n$  Freiheitsgraden  $\{c_i\}$  kann mittels der Eigenvektor-Matrix  $\underline{\underline{X}} = \{x_i\}$  und der Eigenwerte-Matrix  $\underline{\underline{\Lambda}} = \text{diag}(\lambda^{(i)})$ , die durch

$$-\lambda^{(i)} \underline{\underline{M}} x_i + \underline{\underline{S}} x_i = 0, \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (\text{A4-2})$$

bzw.

$$-\underline{\underline{M}} \underline{\underline{X}} \underline{\underline{\Lambda}} + \underline{\underline{S}} \underline{\underline{X}} = 0 \quad (\text{A4-3})$$

definiert sind, für positiv definite Matrizen  $\underline{\underline{M}}$  und  $\underline{\underline{S}}$  auf einen Satz entkoppelter Gleichungen

$$\ddot{\underline{\underline{b}}} + \underline{\underline{\Lambda}} \underline{\underline{b}} = \underline{\underline{r}} \quad (\text{A4-4})$$

transformiert werden, wenn die "Hauptachsentransformation"

$$\underline{\underline{c}} = \underline{\underline{X}} \underline{\underline{b}} \quad (\text{A4-5})$$

benutzt wird [67, § 2.4\_7]. Die neue rechte Seite  $\underline{\underline{r}}$  ist

$$\underline{\underline{r}} = \underline{\underline{\Lambda}} (\underline{\underline{S}} \underline{\underline{X}})^{-1} \underline{\underline{g}} = (\underline{\underline{M}} \underline{\underline{X}})^{-1} \underline{\underline{g}}. \quad (\text{A4-6})$$

Falls die  $n$  Eigenwerte  $\lambda^{(i)}$  unterschiedlich sind, sind die Eigenvektoren orthogonal, so daß

$$\underline{\underline{X}}^T \underline{\underline{S}} \underline{\underline{X}} \quad \text{und} \quad \underline{\underline{X}}^T \underline{\underline{M}} \underline{\underline{X}}$$

Diagonal-Matrizen sind [67, § 2.5\_7]. In diesem Fall ist die Berechnung von  $\underline{\underline{r}}$  aus einer der folgenden Formeln besonders einfach:

$$\underline{\underline{r}} = \underline{\underline{\Lambda}} (\underline{\underline{X}}^T \underline{\underline{S}} \underline{\underline{X}})^{-1} \underline{\underline{X}}^T \underline{\underline{g}} = (\underline{\underline{X}}^T \underline{\underline{M}} \underline{\underline{X}})^{-1} \underline{\underline{X}}^T \underline{\underline{g}} \quad (\text{A4-7})$$

Die Auswahl, welchen der beiden Ausdrücke, den mit  $\underline{\underline{S}}$  oder den mit  $\underline{\underline{M}}$ , man praktisch verwendet, kann von der Struktur der Matrizen  $\underline{\underline{S}}$  und  $\underline{\underline{M}}$  abhängig gemacht werden. Das verwendete CYLDY2-Modell liefert Matrizen, bei denen  $\underline{\underline{S}}$  tridiagonal ist, während  $\underline{\underline{M}}$  eine größere Bandbreite aufweist. In FLUX wird daher der Ausdruck mit  $\underline{\underline{S}}$  verwendet.

#### A4.2 Behandlung von Dämpfung

Wenn die Schwingungsgleichung Dämpfung enthält, dann sind anstelle von (A4-2) die Eigenvektoren des doppelt so großen Systems

$$-\lambda^{(i)} \begin{bmatrix} 0 & M \\ M & D \end{bmatrix} \tilde{x}_i + \begin{bmatrix} -M & 0 \\ 0 & S \end{bmatrix} \tilde{x}_i = 0 \quad (\text{A4-8})$$

zu verwenden, wobei die Eigenwerte  $\lambda^{(i)}$  in der Regel komplex sind [91]. Diesen Aufwand wird man aber nur treiben, wenn die Dämpfung groß ist, was in den vorliegenden Anwendungen nicht der Fall ist.

Wenn man trotz Dämpfung die Transformation (A4-5) benutzt, so lautet die transformierte Schwingungsgleichung statt (A4-4)

$$\ddot{\tilde{b}} + (\underline{\underline{X}}^T \underline{\underline{M}} \underline{\underline{X}})^{-1} (\underline{\underline{X}}^T \underline{\underline{D}} \underline{\underline{X}}) \dot{\tilde{b}} + \underline{\underline{A}} \tilde{b} = \tilde{x}, \quad (\text{A4-9})$$

wobei die resultierende Dämpfungsmatrix in der Regel keine Diagonalmatrix ist. In der Praxis führt man hier zumeist Näherungen derart ein, daß man die Matrix  $\underline{\underline{D}}$  so abwandelt, daß ihre transformierte

$$\underline{\underline{\mathcal{D}}} \equiv (\underline{\underline{X}}^T \underline{\underline{M}} \underline{\underline{X}})^{-1} (\underline{\underline{X}}^T \underline{\underline{D}} \underline{\underline{X}})$$

eine Diagonalmatrix ist, also  $\underline{\underline{\mathcal{D}}} = \text{diag}(\alpha^{(i)})$ .

Im vorliegenden Fall ist die Dämpfungsmatrix  $\underline{\underline{D}}$  ja zunächst unbekannt. Theoretisch ist sie (zumindest für die Struktur)

schwer zu ermitteln und Experimente stehen aus. In solchen Fällen behilft man sich, indem man ein geschätztes Dämpfungsmaß einsetzt:

$$\alpha^{(i)} = 2 \zeta_{damp} \omega^{(i)} \quad (\text{A4-10})$$

mit der Eigenfrequenz des ungedämpften Systems,  $\omega^{(i)} = (\lambda^{(i)})^{1/2}$  [91\_7]. Die resultierende Schwingungsgleichung lautet dann für jede generalisierte Koordinate  $b_i$ :

$$\ddot{b}_i + \alpha^{(i)} \dot{b}_i + \lambda^{(i)} b_i = r_i, \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (\text{A4-11})$$

Im Programm wird für die Strukturdämpfung der Parameter  $\zeta_{damp}$  als Eingabe erwartet.

#### A4.3 Transformations-Konvention und Abbruchskriterium

Wenn man in (2-13) die ursprünglichen Koordinaten  $\underline{c}$  durch die generalisierten Koordinaten  $\underline{b}$  ersetzt sowie

$$\begin{aligned} \underline{M} & \text{ durch } \underline{I}, & \underline{S} & \text{ durch } \underline{\Lambda} \\ \underline{D} & \text{ durch } \underline{\mathcal{V}} \end{aligned}$$

und die Matrizen  $\underline{V}$  und  $\underline{R}$  in (2-55'), (2-65') durch  $\underline{V} \cdot \underline{X}$  und  $\underline{\Lambda} (\underline{X}^T \underline{S} \underline{X})^{-1} \underline{X}^T \underline{R}$ , so kann man die einzelnen Strukturmoden separat behandeln und hat bei der Integration der Strukturdynamik nur Diagonalmatrizen zu invertieren. Diese Technik wird in FLUX genutzt.

Wenn  $\Delta t \gg 1/\omega^{(i)}$  für einige  $i$ , dann wird bei der Zeitintegration der Beitrag des  $i$ -ten Strukturfreiheitsgrades nur noch ungenau erfaßt. In FLUX werden konsequenterweise diejenigen generalisierten Koordinaten, für die

$$\omega^{(i)} > \omega_{max}$$

ist, von vornherein eliminiert, was zu erheblicher Reduktion des Speicher- und Rechenaufwandes führt. Der Wert  $\omega_{max}$  ist

eine Eingabegröße. Praktisch bedeutet das, daß bei gleicher Anzahl von Freiheitsgraden mit diesem Abbruchskriterium eine größere Anzahl  $M$  und  $N$  von Modes in (2-14) verwendbar sind. Dies erlaubt eine genauere räumliche Approximation, da die vernachlässigten hochfrequenten Modes bei dem gewählten Zeitschritt sowieso kaum angeregt werden.

## Anhang 5: DER SCHNELLE ELLIPTISCHE LÖSER POISTP: EINZELHEITEN

### A5.1 Aufstellung des Gleichungssystems

Dieser Anhang beschreibt ein direktes Verfahren zur Lösung der elliptischen Differentialgleichung

$$a(x) \frac{\partial}{\partial x} \left[ b(x) \frac{\partial u}{\partial x} \right] + c(x) u + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = v(x, y) \quad (\text{A5-1})$$

auf dem Rechteck  $B = \{ (x, y) : 0 < x < X, 0 < y < Y \}$  mit Neumann- $(\gamma_L, \gamma_R, \gamma_O, \gamma_U = 1)$  oder Dirichlet- $(\gamma_L, \gamma_R, \gamma_O, \gamma_U = 0)$  Randbedingungen auf den vier Randstrecken (oben  $O$ , unten  $U$ , links  $L$ , rechts  $R$ ) gemäß Abb. 4-2.

$$\begin{aligned} L &= \{ (x, y) : x=0, 0 < y < Y \} : (1-\gamma_L) u + \gamma_L \frac{\partial u}{\partial x} = \tau_L(y) \\ R &= \{ (x, y) : x=X, 0 < y < Y \} : (1-\gamma_R) u + \gamma_R \frac{\partial u}{\partial x} = \tau_R(y) \\ U &= \{ (x, y) : 0 < x < X, y=0 \} : (1-\gamma_U) u + \gamma_U \frac{\partial u}{\partial y} = \tau_U(x) \\ O &= \{ (x, y) : 0 < x < X, y=Y \} : (1-\gamma_O) u + \gamma_O \frac{\partial u}{\partial y} = \tau_O(x) \end{aligned} \quad (\text{A5-2})$$

Auf dem betrachteten Rechteck definieren wir ein rechteckiges Maschennetz mit  $M \times N$  inneren Maschenpunkten. Das Maschennetz besteht aus Linien

$$\begin{aligned} x &= x_i = \text{const}, \quad x_i < x_{i+1}, \quad i = 0, 1, 2, \dots, M, M+1 \\ y &= y_j = (j - \frac{1}{2} \gamma_U) \Delta y, \quad j = 0, 1, 2, \dots, N, N+1 \end{aligned}$$

mit

$$\Delta y = Y / [N+1 - \frac{1}{2} (\gamma_O + \gamma_U)]$$

sowie

$$\begin{aligned} \Delta x_{i+1/2} &= x_{i+1} - x_i, \quad x_{i+1/2} = \frac{1}{2} (x_{i+1} + x_i), \quad i = 0, 1, \dots, M \\ \Delta x_i &= (x_{i+1} - x_i), \quad i = 1, 2, \dots, M. \end{aligned}$$

Das Netz besteht also aus äquidistanten Maschen in y-Richtung und beliebigen Maschen in x-Richtung. Dabei ist das Netz so

konstruiert, daß der Rand bei einer Dirichlet-Randbedingung auf eine Maschenlinie und bei Neumann-Randbedingung auf die Mitte zwischen zwei Maschenlinien fällt (staggered grid). Siehe als Beispiel Abb. A5-1 (eine von 16 möglichen Randbedingungskonfigurationen).

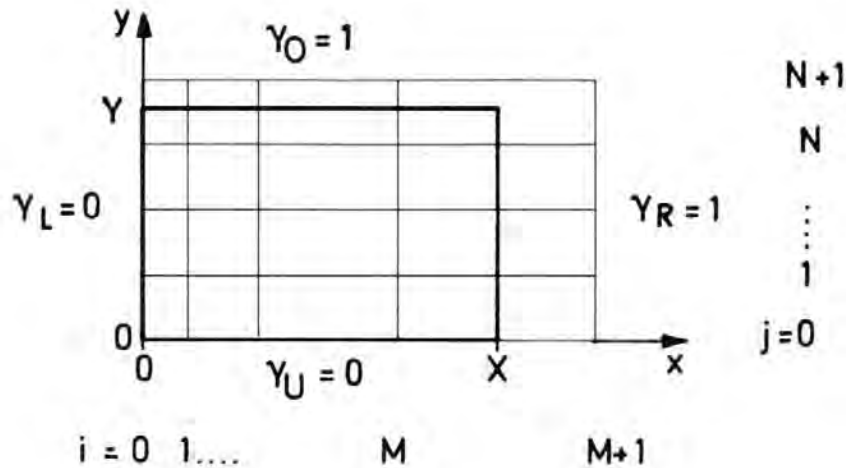


Abb. A5-1: Beispiel für Maschennetz bei Dirichlet ( $\gamma=0$ ) und Neumann ( $\gamma=1$ ) Randbedingungen

Auf dem so definierten Maschennetz verwenden wir Differenzenapproximationen zweiter Ordnung. Aus der Differentialgleichung (A5-1) entsteht die Differenzengleichung

$$\begin{aligned}
 & a(x_i) \frac{1}{\Delta x_i} \left[ b(x_{i+1/2}) \frac{1}{\Delta x_{i+1/2}} (u_{i+1,j} - u_{i,j}) \right. \\
 & \quad \left. - b(x_{i-1/2}) \frac{1}{\Delta x_{i-1/2}} (u_{i,j} - u_{i-1,j}) \right] \\
 & + c(x_i) u_{i,j} \\
 & + \frac{1}{\Delta y^2} [u_{i,j+1} - 2u_{i,j} + u_{i,j-1}] = v(x_i, y_j) \\
 & i = 1, 2, \dots, M; \quad j = 1, 2, \dots, N,
 \end{aligned} \tag{A5-3}$$



wobei  $u_{i,j} \approx u(x_i, y_j)$ . Aus den Randbedingungen (A5-2) erhalten wir die fehlenden Gleichungen für die Randwerte:

$$\begin{aligned} L: (1-\gamma_L) u_{0,j} + \gamma_L \frac{1}{\Delta x_{1/2}} (u_{1,j} - u_{0,j}) &= \tau_L(y_j) \\ R: (1-\gamma_R) u_{M+1,j} + \gamma_R \frac{1}{\Delta x_{M+1/2}} (u_{M+1,j} - u_{M,j}) &= \tau_R(y_j) \\ j &= 1, 2, \dots, N \\ U: (1-\gamma_U) u_{i,0} + \gamma_U \frac{1}{\Delta y} (u_{i,1} - u_{i,0}) &= \tau_U(x_i) \\ O: (1-\gamma_O) u_{i,N+1} + \gamma_O \frac{1}{\Delta y} (u_{i,N+1} - u_{i,N}) &= \tau_O(x_i) \\ i &= 1, 2, \dots, M \end{aligned} \tag{A5-4}$$

Hiermit lassen sich die Randwerte aus (A5-3) eliminieren. Wir definieren die Abkürzungen

$$\begin{aligned} A_i &= \alpha(x_i) b(x_{i-1/2}) \Delta y^2 / (\Delta x_i \Delta x_{i-1/2}), \\ C_i &= \alpha(x_i) b(x_{i+1/2}) \Delta y^2 / (\Delta x_i \Delta x_{i+1/2}), \\ B_i &= -A_i - C_i + c(x_i) \Delta y^2 - 2, \end{aligned} \tag{A5-4}$$

sowie neue rechte Seiten (bzw. Quellen), die auch die Randwerte berücksichtigen:

$$\begin{aligned}
 v_{i,j} = \Delta y^2 \Big\{ & v(x_i, y_j) \\
 & - \delta_{i,1} \tau_L(y_j) \alpha(x_1) b(x_{1/2}) \\
 & \quad [\gamma_L + (1-\gamma_L)/\Delta x_{1/2}] / \Delta x_1 \\
 & - \delta_{i,M} \tau_R(y_j) \alpha(x_M) b(x_{M+1/2}) \\
 & \quad [\gamma_R + (1-\gamma_R)/\Delta x_{M+1/2}] / \Delta x_M \Big\} \\
 & - \delta_{j,1} \tau_U(x_i) [\gamma_U \Delta y + (1-\gamma_U)] \\
 & - \delta_{j,N} \tau_O(x_i) [\gamma_O \Delta y + (1-\gamma_O)] \quad (A5-5)
 \end{aligned}$$

Sodann fassen wir die Unbekannten und Quellen auf Maschenzeilen zu Vektoren zusammen

$$u_j \equiv \begin{Bmatrix} u_{1,j} \\ u_{2,j} \\ \vdots \\ u_{M,j} \end{Bmatrix}, \quad v_j \equiv - \begin{Bmatrix} v_{1,j} \\ v_{2,j} \\ \vdots \\ v_{M,j} \end{Bmatrix} \quad (A5-6)$$

und definieren die  $M \times M$  Matrix

$$A \equiv - \begin{bmatrix} (B_1 + \gamma_L A_1) & C_1 & & & \\ & A_2 & B_2 & C_2 & \\ & & \cdot & \cdot & \cdot \\ & & & A_{M-1} & B_{M-1} & C_{M-1} \\ & & & & A_M & (B_M + \gamma_R C_M) \end{bmatrix} \quad (A5-7)$$

und  $I$ , die  $M \times M$  Einheitsmatrix. Dann lautet das Gleichungssystem schließlich

$$\underline{\underline{L}} \underline{\underline{u}} = \underline{\underline{v}}, \quad (\text{A5-8})$$

mit  $\underline{\underline{u}} = [u_1, u_2, \dots, u_N]^T$ ;  $\underline{\underline{v}} = [v_1, v_2, \dots, v_N]^T$

und

$$\underline{\underline{L}} = \begin{bmatrix} (A - \gamma_U I) & -I & & & \\ -I & A & -I & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots \\ & & -I & A & -I \\ & & & -I & (A - \gamma_0 I) \end{bmatrix}. \quad (\text{A5-9})$$

$\underline{\underline{L}}$  ist eine (möglicherweise singuläre) blocktridiagonale Matrix, bestehend aus  $N \times N$  Blöcken zu je  $M \times M$  Elementen.

#### A5.2 Lösung mittels zyklischer Reduktion für beliebiges $N \geq 2$ und $M \geq 2$

Das Verfahren zur Lösung des Systems (A5-9) wurde für  $\gamma_U = \gamma_0 = 1$  in [64] beschrieben. Im folgenden werden die Änderungen angegeben, die für den vorliegenden allgemeineren Fall benötigt werden. Hierbei beziehen wir uns auf die in [64] angegebenen Gleichungen und Notationen, die entsprechend erweitert werden:

$$\text{Gl. (4)} \quad K^{(0)} = A - \gamma_U I, \quad B^{(0)} = A - \gamma_0 I \quad (\text{A5-10})$$

$$\text{Gl. (13)} \quad K^{(r)} = \frac{2^r}{\pi} \left[ A - (2 \cos \theta_j) I \right] \quad (\text{A5-11})$$

$$\text{mit} \quad \theta_j = \begin{cases} \frac{(2j-1)\pi}{(2^{r+1}+1)} & \text{falls } \gamma_U = 1 \\ \frac{j\pi}{2^{r+1}+1} & \text{falls } \gamma_U = 0 \end{cases} \quad (\text{A5-12})$$

bzw.

$$\theta_j = \frac{(2j - \gamma_U) \pi}{2^{r+1} + 2 - \gamma_U} \quad \text{für } \gamma_U \text{ beliebig.} \quad (\text{A5-13})$$

Dieses Ergebnis folgt aus einem Polynom-Ansatz mit  $A = 2 \cos \theta$  aus

$$K^{(r)} = \begin{cases} \frac{\sin [(2^r + 1) \theta]}{\sin \theta} & , \quad \gamma_U = 0 \\ \frac{\cos [(2^r + \frac{1}{2}) \theta]}{\cos (\theta/2)} & , \quad \gamma_U = 1 \end{cases} \quad (\text{A5-14})$$

$$\text{Gl. (16)} \quad b_r(A) = \begin{cases} \frac{\sin [(k_r + 1) \theta]}{\sin \theta} & , \quad \gamma_0 = 0 \\ \frac{\cos [(k_r + \frac{1}{2}) \theta]}{\cos (\theta/2)} & , \quad \gamma_0 = 1 \end{cases} \quad (\text{A5-15})$$

$$c_r(A) = \begin{cases} \frac{\sin [(l_r + 1) \theta]}{\sin \theta} & , \quad \gamma_0 = 0 \\ \frac{\cos [(l_r + \frac{1}{2}) \theta]}{\cos (\theta/2)} & , \quad \gamma_0 = 1 \end{cases} \quad (\text{A5-16})$$

$$\text{Gl. (17)} \quad B^{(r)} = \prod_{j=1}^{k_r} (A - (2 \cos \theta_j) I), \quad \theta_j = \frac{(2j - \gamma_0) \pi}{2 k_r + 2 - \gamma_0} \quad (\text{A5-17})$$

$$\text{Gl. (18)} \quad l_r > 0:$$

$$C^{(r)} = \prod_{j=1}^{l_r} [A - (2 \cos \theta_j) I], \quad \theta_j = \frac{(2j - \gamma_0) \pi}{2 l_r + 2 - \gamma_0} \quad (\text{A5-18})$$

Gl. (26)

$$e(A) = \begin{cases} \frac{\sin[(k_r+2)\theta]}{\sin\theta} \frac{\sin(2^r\theta)}{\sin\theta}, & \gamma_0=0 \text{ \& } \gamma_U=0 \\ \frac{\cos[(k_r+\frac{3}{2})\theta]}{\cos(\theta/2)} \frac{\sin(2^r\theta)}{\sin\theta}, & \begin{cases} \gamma_U=0 \text{ \& } \gamma_0=1 \\ \text{oder} \\ \gamma_U=1 \text{ \& } \gamma_0=0 \end{cases} \\ \frac{\sin[(k_r+1)\theta]}{\sin\theta} (2\cos\theta-2) \frac{\sin(2^r\theta)}{\sin\theta}, & \gamma_U=1 \text{ \& } \gamma_0=1. \end{cases} \quad (\text{A5-19})$$

Gl. (27)

$$E = \prod_{j=1}^{k_r+1} \left[ A - 2\cos\left\{ \frac{(2j-1)\gamma_U-\gamma_0}{2k_r+4-\gamma_U-\gamma_0} \pi \right\} I \right] \cdot \prod_{j=1}^{2^r-1} \left[ A - 2\cos\left( \frac{j\pi}{2^r} \right) I \right] \quad (\text{A5-20})$$

Die Matrix  $M$  kann nur für  $(\gamma_U=0 \text{ \& } \gamma_0=0)$  oder  $(\gamma_U=1 \text{ \& } \gamma_0=1)$  konstruiert werden:

Gl. (33):  $\gamma \equiv \gamma_U = \gamma_0$

$$M = \prod_{j=1}^{2^{r+1}-\gamma} \left( A - 2\cos\left[ \frac{(2j-\gamma)\pi}{2^{r+1}+2-\gamma} \right] I \right) \cdot \prod_{j=1-\gamma}^{2^r-1} \left( A - 2\cos\left( \frac{j\pi}{2^r} \right) I \right) \quad (\text{A5-21})$$

Diese Darstellung beruht auf  $A = 2\cos\theta$  und

$$M^{(r)}(A) = \begin{cases} \frac{2\cos[(2^r+1)\theta] \sin(2^r\theta)}{\sin\theta}, & \gamma=0 \\ \frac{-2\sin[(2^r+\frac{1}{2})\theta] \sin(2^r\theta)}{\sin\theta}, & \gamma=1 \end{cases} \quad (\text{A5-22})$$

Falls  $\gamma_U \neq \gamma_0$  und  $\ell_r=0$  ist, kann Gl. (35) benutzt werden.

Gl. (38)

$$d(A) = \begin{cases} \frac{\sin[(k_T + 2^T + 2)\theta]}{\sin \theta} \frac{\sin(2^T \theta)}{\sin \theta} & , \gamma_U = \gamma_O = 0 \\ \frac{\cos[(k_T + 2^T + \frac{3}{2})\theta]}{\cos(\theta/2)} \frac{\sin(2^T \theta)}{\sin \theta} & , \gamma_U \neq \gamma_O \\ \frac{\sin[(k_T + 2^T + 1)\theta]}{\sin \theta} \frac{\sin(2^T \theta)}{\sin \theta} (2 \cos \theta - 2) & , \gamma_U = \gamma_O = 1 \end{cases} \quad (A5-23)$$

Gl. (39)

$$D = \left\{ \frac{(k_T + 2^T + 1 - \gamma - \gamma_U)}{\pi} \left[ A - 2 \cos \left( \frac{(2j - |\gamma_O - \gamma_U|) \pi}{2k_T + 2^{T+1} + 4 - \gamma_O - \gamma_U} \right) I \right] \right\}_{j=1}^{2^T-1} \cdot \left\{ \frac{2^T-1}{\pi} \left[ A - 2 \cos \left( \frac{j\pi}{2^T} \right) I \right] \right\}_i \quad (A5-24)$$

falls  $\gamma_U = \gamma_O = 0$ , dann muß der Faktor  $(A - 2I)$  hinzugefügt werden.

In [64, § III\_7] wird die Länge  $L$  angegeben. Die Angaben müssen lauten:

$$\begin{aligned} L &= N - 1 && \text{für } (N = N_2 + 1) \& (\gamma_U = \gamma_O) \\ L &= [3,75 \cdot N] - 4 && \text{für } (\gamma_U = \gamma_O) \& (N_2 + 1 < N \leq \frac{3}{2} N_2) \\ &&& | (\gamma_U \neq \gamma_O) \& (N_2 + 1 \leq N \leq \frac{3}{2} N_2) \\ L &= 2N - 2 && \text{für } \frac{3}{2} N_2 < N \leq 2N_2. \end{aligned} \quad (A5-25)$$

Der in [64] beschriebene Reduktionsprozeß wird normalerweise ausgeführt bis eine einzelne Blockgleichung, nämlich (24 oder 31 oder 36), übrigbleibt. Wenn aber die abgebrochene Version nach Buzbee [65] verwendet werden soll, wenn also der Abbruchparameter  $\varepsilon > 0$  und der kleinste Eigenwert  $\lambda^2$  der Matrix  $\underline{L}$  positiv ist, dann wird die Reduktion abgebrochen, wenn  $r = \ell$  mit

$$2^\ell \geq \frac{1 - \ln(\varepsilon)}{\alpha + \cosh(1 + \lambda^2/2)} \quad (\text{A5-26})$$

ist und gesetzt:

$$\begin{aligned} v_j &= p_j^{(\ell)} \\ q_j^{(\ell)} &= 0 \end{aligned} \quad j = 1, 1+2^\ell, 1+2 \cdot 2^\ell, \dots, J_\ell \quad (\text{A5-27})$$

und damit der in Gl. (29, 30) beschriebene Rücksubstitutionsprozeß für  $r = \ell-1, \ell-2, \dots, 0$  ausgeführt.

Anhang 6: NÄHERUNGSFORMELN FÜR VIRTUELLE FLUID-MASSEN UND  
DÄMPFUNGSKOEFFIZIENTEN

In § 5.4, Abb. 5-4, wurden zwei vereinfachte Schwingungsformen des Kernmantels spezifiziert, die eine überschlägige Berechnung der gekoppelten Eigenschwingungen mit einfachen Formeln zulassen. Diese Formeln werden hier abgeleitet.

Es wird vorausgesetzt:

- enger Spalt im Ringraum  $H_R \ll R_M$
- kleine normale Verformungen  $w \ll H_R$
- kleine Geschwindigkeiten

Für enge Spalten kann die 3D Laplace-Gleichung für das Druckfeld auf eine 2D Poisson-Gleichung

$$\operatorname{div} \operatorname{grad} p + s_0 \ddot{w} / H_R = 0 \quad (\text{A6-1})$$

reduziert werden. Hierbei ist  $\ddot{w}$  die Beschleunigung der linken Wand ( $r=R_M$ ); die rechte Wand ( $r=R_V > R_M$ ) sei starr. Zu (A6-1) gelangt man durch Mittelung über den Querschnitt mit der Breite  $H_R$  und Berücksichtigung der 3D-Randbedingung

$$\frac{\partial p}{\partial r} = - s_0 \ddot{w}.$$

### A6.1 Atmungs-Mode

#### A6.1.1 Druckfeld und virtuelle Masse

Wegen der Rotationssymmetrie reduziert sich (A6-1) auf

$$\frac{\partial^2 p}{\partial z^2} + \frac{s_0 \ddot{w}}{H_R} = 0. \quad (\text{A6-2})$$

Als Randbedingung gelten

$$\frac{\partial p}{\partial z} = 0 \quad \text{bei } z=0 \quad (\text{obere Flansch}) \quad (\text{A6-3})$$



und

$$p = p_I \quad \text{bei } z = L_M \text{ (Übergang zum Plenum)}. \quad (\text{A6-4})$$

Im Innenraum wird das Druckfeld näherungsweise als konstant ( $p = p_I$ ) angenommen.

Mit dem Verformungsansatz (5-8) lautet die Lösung für die Druckdifferenz  $\Delta p \equiv p - p_I$ :

$$\Delta p(z) = \frac{1}{2} \frac{\rho_0}{H_R} (L_M^2 - z^2) \ddot{c} \quad (\text{A6-5})$$

Die daraus resultierende modale Strukturlast ist entsprechend (2-12)

$$q = - \int_0^{2\pi} \int_0^{L_M} \Delta p(z) \, dz \, R_M \, d\varphi, \quad (\text{A6-6})$$

$$= - 2\pi R_M L_M \frac{1}{3} \rho_0 \frac{L_M^2}{H_R} \ddot{c}. \quad (\text{A6-7})$$

Die virtuelle Fluid-Masse  $F$  ist durch

$$q = - F \ddot{c} \quad (\text{A6-8})$$

definiert, vergl. (3-14, 3-15), und also

$$F = 2\pi R_M L_M \frac{1}{3} \rho_0 \frac{L_M^2}{H_R}. \quad (\text{A6-8})$$

#### A6.1.2 Geschwindigkeitsfeld und Dämpfung

Aus der Kontinuitätsgleichung und der Randbedingung  $u=0$  am Flansch bei  $z=0$  folgt

$$u = \dot{c} z / H_R \quad (\text{A6-10})$$

für die axiale Geschwindigkeitskomponente. Dies ist zugleich die zum Kernmantel tangentielle Komponente. Gemäß (5-3) beträgt die Energiedissipation also

$$\mathcal{D} = 2 \cdot \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \int_0^{L_M} f u^2(z) dz R_M d\varphi. \quad (\text{A6-11})$$

Der Faktor 2 berücksichtigt die Reibung an beiden Seiten des Spaltes. Integration liefert

$$\mathcal{D} = \frac{2}{3} \pi R_M L_M^3 f \dot{c}^2 / H_R^2. \quad (\text{A6-12})$$

Hieraus folgt der durch  $\mathcal{D} = \frac{1}{2} \dot{c} D \dot{c}$  definierte Dämpfungskoeffizient unter Beachtung von (5-2) zu

$$D = 8 \pi \eta R_M L_M^3 / H_R^3, \quad (\text{A6-13})$$

wobei  $\eta$  die (effektive) dynamische Viskosität des Fluids ist.

## A6.2 Balken-Biege-Mode

### A6.2.2 Das Druckfeld

Im Ringraum verwenden wir den Ansatz

$$p(z, \varphi) = \hat{p}(z) \cos \varphi. \quad (\text{A6-14})$$

Da axial nur wenig strömen kann, wird  $\partial^2 p / \partial z^2$  in (A6-1) vernachlässigt, so daß mit  $\ddot{w}$  gemäß (5-15)

$$\frac{1}{R_M^2} \frac{\partial^2 p}{\partial \varphi^2} + \frac{S_0}{H_R} \ddot{c} \left( \frac{z}{L_M} \right)^2 \cos \varphi = 0 \quad (\text{A6-15})$$

zu lösen ist. Einsetzen des Ansatzes (A6-14) liefert

$$p(z, \varphi) = \frac{S_0 R_M^2}{H_R} (z/L_M)^2 \ddot{c}. \quad (\text{A6-16})$$

Im Innenraum kann ebenfalls die axiale zweite Ableitung vernachlässigt werden. Der Ansatz

$$p(z, r, \varphi) = \hat{p}(z) r \cos \varphi \quad (\text{A6-17})$$

erfüllt hier die Laplace-Gleichung

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial p}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 p}{\partial \varphi^2} = 0 \quad (\text{A6-18})$$

identisch. Die Amplitude  $\hat{p}(z)$  folgt aus der Randbedingung

$$\frac{\partial p}{\partial r} (r = R_M) = - \varrho_0 \ddot{w} : \quad (\text{A6-19})$$

$$\hat{p}(z) = - \varrho_0 \ddot{c} (z/L_M)^2. \quad (\text{A6-20})$$

Damit beträgt die Druckdifferenz am Kernmantel

$$\Delta p(z, \varphi) = \varrho_0 \ddot{c} (z/L_M)^2 \cos \varphi R_M (R_M/H_R + 1). \quad (\text{A6-21})$$

Die modale Strukturlast hat also den Wert

$$\begin{aligned} q &= - \int_0^{2\pi} \int_0^{L_M} \Delta p(z, \varphi) (z/L_M)^2 \cos \varphi dz R_M d\varphi, \\ &= - \frac{\pi}{5} \varrho_0 R_M^2 (1 + R_M/H_R) L_M \ddot{c} \end{aligned} \quad (\text{A6-22})$$

und die virtuelle Fluid-Masse ist

(A6-23)

$$F = \frac{\pi}{5} \rho_0 R_M^2 L_M + \frac{\pi}{5} \rho_0 R_M^2 L_M (R_M / H_R),$$

wobei der erste Summand die virtuelle Fluid-Masse des Innen- und der zweite die des Ringraums erfaßt.

#### A6.2.2 Geschwindigkeitsfeld und Dämpfung

Für die Dämpfung ist im Rahmen der Näherung allein die azimutale Geschwindigkeitskomponente  $u_\varphi = u_t$  im Ringraum maßgebend, da im Innenraum zwischen Kernmantel und Fluid keine Relativ-Geschwindigkeit auftritt.

Eine Massenbilanz mit Berücksichtigung der Symmetrie ( $u_\varphi(\varphi=0)=0$ ) liefert

$$u_t = \dot{C} \frac{R_M}{H_R} (z/L_M)^2 \sin \varphi. \quad (\text{A6-24})$$

Analog zu A6.1.2 folgt

$$D = \frac{12}{5} \pi \eta \left( \frac{R_M}{H_R} \right)^3 L_M. \quad (\text{A6-25})$$

Dieser Wert ist in der Regel (d.h. für  $R_M < L_M$ ) kleiner als der für den Atmungs-Mode.

## Anhang 7: DIMENSIONSANALYSE

Im folgenden wird ein Satz von Kennzahlen zur Beschreibung des Fluid-Struktur-Problems aufgestellt. Hierzu wird wie in [104, S. 26-28] vorgegangen. Die Zahl der Kennzahlen ist relativ groß wegen der Vielzahl geometrischer Parameter. Es werden daher nur die wesentlichen Geometrie-Parameter berücksichtigt. Auch bei der Auswahl der interessierenden abhängigen Parameter gibt es viele Möglichkeiten; die folgende Tabelle erfaßt wieder nur die wichtigsten Größen. Bezüglich der Struktur werden lediglich der Atmungs- und Biege-Mode (entsprechend Abb. 5-4) berücksichtigt (Indizes A und B).

Unabhängige Parameter:

Geometrie (vgl. Abb.6-1)	Stoffdaten (siehe Tab. 1)	Randwerte (siehe Tab. 1)
$R_S$ $L_S$ $L_F$ $H_R$ $H_M$ $R_M$ $L_M$ $V^{*)}$	$S_0$ $\alpha$ $\eta$ $S_M$ $E$	$\Delta p \equiv (p_0 - p_1)$

\*) Druckbehälter-Volumen

Abhängige Parameter:

$u_0$	Ausströmgeschwindigkeit
$\tau_Q$	Wellenlaufzeit
$\tau$	Beschleunigungszeit

$\tau_{max}$	Zeit, in der der Druck im Behälter auf $p_1$ (Satttdampfdruck) absinkt
$w_A, w_B$	Kernmantel-Verformung
$\omega_A, \omega_B$	Eigenkreisfrequenz im Wasser
$\sigma_A, \sigma_B$	Spannungen (jeweils für <u>A</u> tmungs- bzw. <u>B</u> iege-Mode)

Die Gesamtzahl dieser dimensionsbehafteten Größen ist 23. Die Zahl der Basis-Dimensionen ist 3 (z.B. Masse, Länge, Zeit). Nach dem  $\pi$ -Theorem von Buckingham [104, S. 27] können genau 20 unabhängige Kennzahlen definiert werden.

Zunächst werden 10 Kennzahlen angegeben, deren Größenordnung eins ist und die zur überschlägigen Bestimmung der abhängigen Parameter dienen können: Die Formeln basieren zum Teil auf den Ergebnissen des Anhang 6. Da eine gewisse Willkür zulässig ist, werden keine Detailbegründungen angegeben.

$$\pi_1 = \frac{p_0 u_0^2}{\Delta p}$$

$$\pi_6 = \frac{w_B H_M R_M^2 E}{\Delta p L_M^4}$$

$$\pi_2 = \frac{\tau (\Delta p / p_0)^{1/2}}{L_S}$$

$$\pi_7 = \frac{\omega_A^2 p_M R_M^2}{E}$$

$$\pi_3 = \frac{\tau_\alpha \alpha}{L_S}$$

$$\pi_8 = \frac{\omega_B^2 L_M^4 p_M}{E R_M^2}$$

$$\pi_4 = \frac{\tau_{max} \alpha^2 R_S^2}{V} \left( \frac{p_0}{\Delta p} \right)^{1/2}$$

$$\pi_9 = \frac{\sigma_A H_M}{\Delta p R_M}$$

$$\pi_5 = \frac{w_A H_M E}{\Delta p R_M^2}$$

$$\pi_{10} = \frac{\sigma_B H_M}{\Delta p L_M}$$

Aufgrund dieser Kennzahlen könnte man die charakteristischen Größen bestimmen, mit deren Hilfe die Ergebnisse dimensionlos darstellbar wären. Allerdings erkennt man gleich, daß die "Qual der Wahl" zwischen mehreren möglichen Bezugsgrößen gegeben ist.

Die zehn weiteren Kennzahlen sollen allein unabhängige Parameter enthalten. Sie werden so formuliert, daß aus ihnen Rückschlüsse auf die Wichtigkeit einzelner Effekte gezogen werden können:

- Einfluß der Zähigkeit auf das beschleunigte Fluid (inverse Reynoldszahl)

$$\frac{\eta \tau_{\max}}{\rho_0 R_S L_S} \quad \text{bzw.} \quad \pi_{11} = \frac{\eta V (\Delta p / \rho_0)^{1/2}}{\rho_0 \alpha^2 R_S^3 L_S}$$

- Einfluß der Zähigkeit auf die Strukturschwingung (aus  $\frac{D}{F \tau_{\max}}$  gemäß Anhang 6)

$$\frac{\eta \tau_{\max}}{\rho_0 H_R^2} \quad \text{bzw.} \quad \pi_{12} = \frac{\eta V (\Delta p / \rho_0)^{1/2}}{\rho_0 \alpha^2 R_S^2 H_R^2}$$

- relative Verformung

$$\frac{w_A}{H_R} \quad \text{bzw.} \quad \pi_{13} = \frac{\Delta p R_M^2}{E H_M H_R}$$

- Kompressibilität im stationär strömenden Fluid (Mach-Zahl)

$$\left( \frac{u_0}{\alpha} \right)^2 \quad \text{bzw.} \quad \pi_{14} = \frac{\Delta p}{\rho_0 \alpha^2}$$

Kenngrößen der Fluid-Struktur-Koppelung

- Struktur/Fluid Massen-Verhältnis (aufgrund der Mantel-Masse und der virtuellen Fluid-Masse im Balken-Mode)

$$\pi_{15} = \frac{S_M H_M H_R}{S_0 R_M^2}$$

- Struktur/Fluid Steifigkeits-Verhältnis

$$\pi_{16} = \frac{E H_R^2}{S_M R_M^2 Q^2}$$

Geometrie-Kenngrößen

$$\pi_{17} = H_M / R_M \quad (\text{wichtig für Schalen-Modell})$$

$$\pi_{18} = R_M / L_M \quad (\text{Schlankheit des Kernmantels})$$

$$\pi_{19} = R_S / L_S \quad (\text{wichtig für Zulässigkeit einer eindimensionalen Beschreibung der Rohrströmung})$$

$$\pi_{20} = L_F / L_M \quad (\text{bestimmt den effektiven Hebelarm der Last})$$

In der folgenden Tabelle sind diejenigen Kennzahlen zahlenmäßig angegeben, die bei Gültigkeit der in FLUX bzw. CYLDY2 benutzten Annahmen klein sein sollten.

Fall

Effekt	Kennzahl	HDR	DWR	RS16
Fluid-Dämpfung	$\pi_{11}$	$60 \times 10^{-8}$	$1,4 \times 10^{-8}$	$46 \times 10^{-8}$
Struktur-Dämpfung	$\pi_{12}$	$29 \times 10^{-7}$	$2 \times 10^{-7}$	$19 \times 10^{-7}$
Verformung	$\pi_{13}$	0,017	0,009	0,006
Kompressibilität	$\pi_{14}$	0,006	0,012	0,009
Schale	$\pi_{17}$	0,017	0,037	0,026



Die Zahlenwerte sind klein ( $< 2 \%$ ). Dies legt es nahe, daß der Einfluß dieser Kennzahlen auf die abhängigen Kennzahlen klein ist, ohne daß dies jedoch allein aus der Dimensionsanalyse heraus nachweisbar wäre.

## Anhang 8: DISKUSSION DER APPROXIMATIONEN DES FLUX1-MODELLS

In diesem Anhang sollen anhand der maßgebenden Gleichungen (in verkürzter Darstellung) die Bedeutung der im FLUX1-Modell benutzten Vereinfachungen erläutert werden.

Schematisch kann man die eigentlich zu integrierenden Gleichungen nach Ortsdiskretisierung in Matrizenform wie folgt schreiben:

$$\begin{bmatrix} \underline{\underline{M}} & 0 \\ -\underline{\underline{V}} & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{\underline{\underline{c}}} \\ \ddot{\underline{\underline{p}}} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} \underline{\underline{S}} & \underline{\underline{R}} \\ 0 & \underline{\underline{L}} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \underline{\underline{c}} \\ \underline{\underline{p}} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ -\underline{\underline{L}} \underline{\underline{E}} + \underline{\underline{B}} \{ \underline{\underline{p}}_F(t) \} \end{Bmatrix} \quad (\text{A8-1})$$

Hierbei sind  $\underline{\underline{M}}, \underline{\underline{S}}, \underline{\underline{R}}, \underline{\underline{V}}$  die Massen-, Steifigkeits-, Rückwärts- und Vorwärtsmatrizen.  $\underline{\underline{L}}$  entspricht dem diskretisierten Laplace-Operator ( $-\text{div grad}$ ). Die Matrix  $\underline{\underline{B}}$  beschreibt den Einfluß der Randwerte  $\underline{\underline{p}}_F$  an den Öffnungen, insbesondere an der Bruchstelle. Der Vektor  $\underline{\underline{E}}$  der spezifischen kinetischen Energie an den Maschenpunkten ist aus dem simultan zu integrierenden Geschwindigkeitspotential entsprechend den Druckänderungen und den Wandgeschwindigkeiten zu ermitteln.

Anstelle dieses vollständigen Systems wird in FLUX1 folgendes Näherungsproblem gelöst, bei dem zunächst der Druck  $\underline{\underline{p}}$  für starre Wände und dann der Anteil  $\underline{\underline{p}}'$  für flexible Wände zusammen mit den Strukturamplituden  $\underline{\underline{c}}$  berechnet wird.

1) Im ersten Schritt löst FLUX1 für starre Wände die Gleichungen

$$\underline{\underline{L}} \underline{\underline{p}} = -\underline{\underline{L}} \underline{\underline{E}}_0 + \underline{\underline{B}} \{ \underline{\underline{p}}_F \} \quad (\text{A8-2})$$

wobei  $\underline{\underline{E}}_0$  eben nur die Fluidbewegung bei starren Wänden berücksichtigt.

2) Unter Benutzung des mathematischen Hilfsmittels der Eigenanalyse und Hauptachsentransformation wird folgendes System linearer gewöhnlicher Differentialgleichungen integriert:

$$\begin{bmatrix} \underline{\underline{M}} & 0 \\ -\underline{\underline{V}} & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{\underline{\underline{c}}} \\ \ddot{\underline{\underline{p}}}' \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} \underline{\underline{S}} & \underline{\underline{R}} \\ 0 & \underline{\underline{L}}' \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \underline{\underline{c}} \\ \underline{\underline{p}} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -\underline{\underline{R}} \underline{\underline{p}} \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (\text{A8-3})$$

D.h., es wird die zuvor für starre Wände bestimmte Last  $-\underline{\underline{R}} \underline{\underline{p}}$  der Struktur aufgeprägt, bei der Strukturbewegung aber die Koppelung mit dem Fluid berücksichtigt. Allerdings wird dabei der vollständige Operator  $\underline{\underline{L}}$  im zweiten Teil durch  $\underline{\underline{L}}'$  ersetzt, bei dem die Beiträge des Blowdown-Rohres vernachlässigt sind. Dies erlaubt die Aufspaltung des dreidimensionalen Kesselproblems in einem Satz unabhängiger zweidimensionaler Probleme; die virtuelle Fluid-Massen werden getrennt für jeden Kosinus-Mode berechnet.

Um den Unterschied zu (A8-1) verstehen zu können, addieren wir (A8-2) zur zweiten Zeile von (A8-3). Mit

$$\underline{\underline{p}} = \underline{\underline{p}} + \underline{\underline{p}}' \quad (\text{A8-4})$$

erhält man dann:

$$\begin{bmatrix} \underline{\underline{M}} & 0 \\ -\underline{\underline{V}} & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{\underline{\underline{c}}} \\ \ddot{\underline{\underline{p}}} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} \underline{\underline{S}} & \underline{\underline{R}} \\ 0 & \underline{\underline{L}}' \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \underline{\underline{c}} \\ \underline{\underline{p}} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} \underline{\underline{S}} & \underline{\underline{R}} \\ 0 & \underline{\underline{L}} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ \underline{\underline{p}} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ -\underline{\underline{L}} \underline{\underline{E}}_0 + \underline{\underline{B}} \{ \underline{\underline{p}}_F \} \end{Bmatrix} \quad (\text{A8-5})$$

Falls  $\underline{\underline{L}}' = \underline{\underline{L}}$  wäre, dann würde (A8-5) im linearen Fall die gleiche Lösung wie das vollständige System (A8-8) haben.

FLUX1 berechnet also die Lösung des gekoppelten Fluid-Struktursystems. Fehler werden lediglich bei den nichtlinearen Termen und bezüglich der quantitativen Größe der virtuellen Fluid-Massen gemacht. Bei im Vergleich zu den Strömungsgeschwindigkeiten bei starrer Struktur kleinen normalen Wandgeschwindigkeiten und bei im Vergleich zum Druckbehälter kleinen Radien des Blowdown-Rohres werden diese Fehler klein sein.

#### Anhang 9: MÖGLICHE WEITERENTWICKLUNG DES MODELLS

Folgende Aspekte werden in FLUX nach den bisherigen Erfahrungen gemäß §6 mehr oder weniger unzureichend abgedeckt:

- a) die Zweiphasenströmung im Blowdown-Rohr
- b) die Fluid-Reibung, ebenfalls insbesondere im Blowdown-Rohr
- c) das Reaktor-Core und andere Einbauten in ihren Eigenschaften als
  - Feder-Masse-Dämpfer-System und
  - Strömungshindernis
- d) die axiale Beweglichkeit des unteren Kernmantel-Endes
- e) Nichtlinearitäten in der Zustandsgleichung, insbesondere beim Übergang zu zweiphasiger (quasi homogener) Strömung, z.B. im Innenraum.

Es ist vorgesehen, die Punkte a) und b) durch Ankoppelung des Zweiphasen-Ungleichgewichts-Modells DR1X/98\_7 abzudecken. Zum Punkt c) sind zunächst weitere Studien erforderlich, um insbesondere geeignete Strukturdynamik-Modelle für das Core spezifizieren zu können. Wegen Punkt d) laufen Arbeiten im Kernforschungszentrum (Ludwig et al.) mit dem Ziel, ein verbessertes Schalenmodell (CYLDY3) zu erstellen. Die Berücksichtigung von Punkt e) erfordert den Übergang zu iterativen Lösungsverfahren, bei denen allerdings die direkten Verfahren in jedem Iterationsschritt eingesetzt werden können (Block-Iteration [3\_7]).

#### LITERATUR

- [1] D. Smidt: REAKTORTECHNIK, Bd.2, 2. Aufl. (1976), S. 217
- [2] Batelle-Institut e.V. Frankfurt: Ergebnisse der ersten DWR-Versuche mit Einbauten (DWR1-DWR5). Bericht BF-RS 0016B-10-1 (1977)
- [3] U. Schumann (ed.): COMPUTERS, FAST ELLIPTIC SOLVERS AND APPLICATIONS. Proc. of the GAMM-Workshop on Fast Solution Methods for the Discretized Poisson Equation, Karlsruhe, March 3-4, 1977, Advance Publ. Ltd. London (1978)
- [4] R. Krieg, E.G. Schlechtendahl, K.-H. Scholl: Design of the HDR experimental program on blowdown loading and dynamic response of PWR-vessel internals. Nucl. Eng. Design 43 (1977) 419-435
- [5] R. Krieg, E.G. Schlechtendahl, K.-H. Scholl, U. Schumann: Full-scale HDR blowdown experiments as a tool for investigating dynamic fluid-structural coupling. In [17], paper B5/1 (1977)
- [6] K. Müller, K.-H. Scholl: Blowdown-Experimente am HDR (EV 3000), Kernforschungszentrum Karlsruhe, KFK Nachrichten 9 (1977), Heft 2, 26-29
- [7] E.G. Schlechtendahl, R. Krieg, U. Schumann, C.W. Hirt: Analyse der fluid-strukturdynamischen Wechselwirkung von Reaktordruckbehältereinbauten beim Blowdown. Jahreskolloquium 1977 des Projektes Nukleare Sicherheit, KFK 2570 (1977) 127-153
- [8] U. Schumann: Instationäre Potentialströmung in komplexer Geometrie am Beispiel von DWR-Blowdown Strömungen. KFK 2324 (1976)
- [9] W. Flügge: STRESSES IN SHELLS. Springer Verlag (1973)
- [10] A. Ludwig, R. Krieg: Dynamic response of a clamped/ring-stiffened circular cylindrical shell under non-axisymmetric loading. Nucl. Eng. Design 43 (1977) 437-453
- [11] E. Naudascher (ed.): FLOW-INDUCED STRUCTURAL VIBRATIONS. IUTAM-IAHR Symposium Karlsruhe, Aug. 14-16, 1972, Springer Verlag (1974)
- [12] Y.S. Shin, M.W. Wambsganss: Flow-induced vibration in LMFBR steam generators: A state-of-the-art review. Nucl. Eng. Des. 40 (1977) 235-284
- [13] M.P. Paidoussis: The dynamical behaviour of cylindrical structures in axial flow. Ann. Nucl. Sci. Eng. 1(1974) 83-106
- [14] T. Belytschko: Methods and programs for analysis of fluid-structure systems. Nucl. Eng. Des. 42 (1977) 41-52
- [15] R.E.D. Bishop (ed.): Int. Symp. on the DYNAMICS OF MARINE VEHICLES AND STRUCTURES IN WAVES. Univ. College, London 1974, (1975)
- [16] T. Belytschko, T.L. Geers (ed.): COMPUTATIONAL METHODS FOR FLUID-STRUCTURE INTERACTION PROBLEMS. ASME, New York (1977), AMD-Vol. 26

- [17] T.A. Jaeger, B.A. Boley (ed.): Trans. on the 4th Int. Conf. on STRUCTURAL MECHANICS IN REACTOR TECHNOLOGY. Vol.B, San Francisco, 15-19 Aug., (1977)
- [18] International Atomic Energy Agency (ed.): Specialists meeting on LMFBR flow induced vibrations. Argonne, Illinois, Sept. 20-23 (1977), IWGFR/21.
- [19] F. Katz, R. Krieg, A. Ludwig, E.G. Schlechtendahl, K. Stölting: 2D fluid flow in the downcomer and dynamic response of the core barrel during PWR blowdown. In [17], paper B5/2 (1977)
- [20] J.K. Dienes, C.W. Hirt, and L.R. Stein: Computer simulation of the hydroelastic response of a pressurized water reactor to a sudden depressurization. Los Alamos LA-NUREG-6772-MS (1977)
- [21] J.K. Dienes, C.W. Hirt, and L.R. Stein: Multi-dimensional fluid-structure interactions in a pressurized water reactor, in [16], (1977) 15-34
- [22] C.W. Hirt, A.A. Amsden, and J.L. Cook: An arbitrary Lagrangian-Eulerian computing method for all flow speeds. J. Comp. Phys. 14 (1974) 227-253
- [23] C.W. Hirt, N.C. Romero: Application of a drift-flux model to flashing in straight pipes. Los Alamos, LA-6005-MS (1975)
- [24] F.H. Harlow, A.A. Amsden: A numerical fluid dynamics calculation method for all flow speeds. J. Comp. Phys. 8(1971) 197-213
- [25] J.F. Jackson and M.G. Stevenson (ed.): Nuclear reactor safety - quarterly progress report April 1 - June 30, 1977. Los Alamos, LA-NUREG-6934-PR (1977)
- [26] J.K. Dienes, C.W. Hirt, and L.R. Stein: A comparison of SOLA-FLX calculation with experiments at Systems, Science and Software. Los Alamos LA-NUREG-6752-MS (1977)
- [27] Ye.N. Mnev, A.K. Pertsev: HYDRO ELASTICITY OF SHELLS. FTD-MT-24-119-71, AD-731 646 (1970)
- [28] H.N. Abramson: Hydroelasticity - some problems and some solutions. In: J.E. Greenspon (ed.): FLUID-SOLID INTERACTIONS, ASME, New York, (1967), 79-119
- [29] M.K. Au-Yang: Free vibration of fluid-coupled coaxial cylindrical shells of different lengths. J. Appl. Mech. ASME 43(1976) 480-484
- [30] L.H. Chen, M. Pierucci: Underwater fluid-structure interaction. Part I-III Shock and Vibr. Digest 9 (1977), No.4, 23-24; No.5, 17-23; No. 6, 13-17.
- [31] S.S. Chen, H. Chung: Design guide for calculating hydrodynamic mass. Part I. Circular cylindrical structures. ANL-CT-76-45 (1976)

- [32] S.S. Chen, G.S. Rosenberg: Dynamics of a coupled shell-fluid system. Nucl. Eng. Des. 32 (1975) 302-310
- [33] F.L. DiMaggio: Dynamic response of fluid-filled shells. Shock and Vibr. Digest 7 (1975), No. 5, 5-12
- [34] G. Horvay, G. Bowers: Influence of entrained water mass on the vibration modes of a shell. J. Fluids Eng. ASME, I-97 (1975) 211-216
- [35] D. Krajcinovic: Vibrations of two coaxial cylindrical shells containing fluid. Nucl. Eng. Design 30 (1974) 242-248
- [36] Y.P. Lu: Forced vibration of damped cylindrical shells filled with pressurized liquid. AIAA J. 15 (1977) 1242-1249
- [37] B.E. Sandman: Fluid-loading coefficients for a finite cylindrical shell. J. Acoust. Soc. Am. 60 (1976) 1256-1264
- [38] B.E. Sandman: Numerical fluid loading coefficients for the modal velocities of a cylindrical shell. Computers & Structures 6 (1976) 467-473
- [39] R. Szilard (ed.): HYDRODYNAMICALLY LOADED SHELLS. Proc. Sympos. Int. Ass. Shell Structures, Pacific Symp., Univ. Press Hawaii, Honolulu (1971)
- [40] H. Lamb: HYDRODYNAMICS. Dover Publ., New York (1945)
- [41] R.J. Fritz: The effects of liquids on the dynamic motions of immersed solids. J. Eng. Ind. ASME 94 (1972) 167-173
- [42] T.B. Belytschko, J.M. Kennedy: A fluid-structure finite element method for the analysis of reactor safety problems. Nucl. Eng. Des. 38 (1976) 71-81
- [43] A.N. Nahavandi, G.J. Bohm, R.R. Pedrido: Structural compatible fluid finite element for solid fluid interaction studies. Nucl. Eng. Design 35 (1975) 335-347
- [44] O.C. Zienkiewicz: THE FINITE ELEMENT METHOD IN ENGINEERING SCIENCE. McGraw-Hill, London (1971), 330-333
- [45] B. Hunt: Recent progress in panel methods for two- and three-dimensional flows. Von Karman Institut for Fluid Dynamics, Lect. Ser. 4: Comp. Fluid Dyn. (13-17 March) (1978)
- [46] R. Krieg, H. Zehlein: Coupled problems in transient fluid and structural dynamics with application to nuclear engineering. Int. Symp. on Innov. Num. Anal. in Appl. Sci., Versailles 23-27.5. (Abstract) (1977) 5.3.-5.7., Appl. Math. Modelling 2 (1978) 81-89.



- [47] M.K. Au-Yang, W.H. Connelly: A computerized method for flow-induced random vibration analysis of nuclear reactor internals. Nucl. Eng. Des. 42 (1977) 257-263
- [48] T.J. Chung, R.H. Rush: Dynamical coupled motion of surface-fluid-shell system. J. Appl. Mech. ASME (1976) 507-508
- [49] L. Kiefling, G.C. Feng: Fluid-structure finite element vibrational analysis. AIAA J. 14 (1976) 199-203
- [50] N. Hogben: Wave loads on structures. Proc. Conf. on the BEHAVIOUR OF OFFSHORE STRUCTURES (BOSS 76), Trondheim (1976)
- [51] R.L. Citerley, W.C. Gibson, R.E. Ball: Response of a cylindrical fluid container to seismic motion. ASME paper 76-PVP-28 (1976)
- [52] R. Krieg, G. Hailfinger: SING 1 - ein Computercode zur Berechnung transienter dreidimensionaler, inkompressibler Potentialströmungen nach dem Singularitätenverfahren. KFK 2505 (1978)
- [53] F. Kedziur, N. Moussiopoulos, U. Schumann, K. Stölting: PWR-depressurization and its hydraulic analogy. Nucl. Eng. Des. 47 (1978), 25-34
- [54] F.W. Dorr: The direct solution of the discretized Poisson equation on a rectangle. SIAM Rev. 12 (1970) 248-263
- [55] B.L. Buzbee, G.H. Golub, C.W. Nielson: On direct methods for solving Poisson's equation. SIAM J. Numer. Anal. 7 (1970) 627-656
- [56] R.W. Hockney: The potential calculation and some applications. Meth. Comp. Phys. 9 (1970) 135-211
- [57] B.L. Buzbee, F.W. Dorr, J.A. George, G.H. Golub: The direct solution of the discrete Poisson equation on irregular regions. SIAM J. Numer. Anal. 8 (1971) 722-736
- [58] U. Schumann: Über die direkte Lösung der diskretisierten Poisson-Gleichung mittels zyklischer Reduktion. KFK-Ext. 8/75-6 (1976)
- [59] G. Enderle: Definition, Übersetzung und Anwendung benutzerorientierter Sprachen als Erweiterung von PL/I in dem System für das rechnerunterstützte Entwickeln und Konstruieren REGENT. KFK 2204 (1975)
- [60] A.A. Amsden, F.H. Harlow: The SMAC method: A numerical technique for calculating incompressible fluid flows. Los Alamos LA-4370 (1970)
- [61] U. Schumann, R.A. Sweet: Direct Poisson equation solver for potential and pressure fields on a staggered grid with obstacles. Lect. Notes in Physics, Springer Vlg., 59 (1976) 398-403
- [62] E.D. Martin: A generalized-capacity-matrix technique for computing aerodynamic flows. Computers and Fluids 2 (1974) 79-97

- [63\_] C. Temperton: Improved Poisson-solvers for non-rectangular regions. (E.H. Hirschel, W. Geller, ed.): Proc. 2nd GAMM-Conf. on NUMERICAL METH. IN FLUID MECH., DFVLR, Köln (1977) 222-229
- [64\_] U. Schumann, R.A. Sweet: A direct method for the solution of Poisson's equation with Neumann boundary conditions on a staggered grid of arbitrary size. J. Comp. Phys. 20 (1976) 171-182
- [65\_] B.L. Buzbee: Application of fast Poisson solvers to the numerical approximation of parabolic problems. Thesis, Los Alamos, LA-4950-T (1972)
- [66\_] U. Schumann: Three-dimensional Poisson-solver for reactor-vessel geometry. (E.H. Hirschel, W. Geller, ed.). Proc. 2nd GAMM-Conf. on NUMERICAL METH. IN FLUID MECH., DFVLR, Köln (1977) 192-199
- [67\_] R.E.D. Bishop, G.M.L. Gladwell, S. Michaelson: THE MATRIX ANALYSIS OF VIBRATION. Cambridge Univ. Press (1965)
- [68\_] B. Göller: Dynamisches Verhalten dünner Zylinderschalen, unveröffentlicht (1976)
- [69\_] R.E.D. Bishop, D.C. Johnson: THE MECHANICS OF VIBRATION. Cambridge Univ. Press (1960)
- [70\_] Verein Deutscher Ingenieure (Hrsg.): VDI-WASSERDAMPFTAFELN, Springer Verlag (1963)
- [71\_] N.M. Newmark: A method of computation for structural dynamics. J. Eng. Div. ASCE 85 (1959) No. EM3, 67-94
- [72\_] K.C. Park: Practical aspects of numerical time integration. Computers & Structures 7 (1977) 343-353
- [73\_] G. Weeks: Temporal operators for nonlinear structural dynamics problems. J. Eng. Mech. Div. ASCE 98 (1972), No. EM5, 1087-1103
- [74\_] K.J. Bathe, E.L. Wilson: Stability and accuracy analysis of direct integration methods. Earthquake Eng. Struct. Dyn. 1 (1973) 283-291
- [75\_] S.P. Chan, H.L. Cox, W.A. Benfield: Transient analysis of forced vibrations of complex structural-mechanical systems. J. Roy. Aeron. Soc. 66 (1962) 457-460
- [76\_] R.D. Richtmyer, K.W. Morton: DIFFERENCE METHODS FOR INITIAL-VALUE PROBLEMS. 2nd ed., Interscience Publ. (1967)
- [78\_] S.A. Orszag: Comparison of pseudospectral and spectral approximation. Stud. in Appl. Math. 51 (1972) 253-259
- [79\_] S.A. Orszag: Numerical simulation of incompressible flows within simple boundaries. I. Galerkin (spectral) representations. Stud. in Appl. Math. 50 (1971) 293-327
- [80\_] Y.W. Chang, C.Y. Wang: An Eulerian method for large-displacement fluid-structure interactions in reactor containments. In [16\_] (1977), 1-14

- [81] L.E. Payne: IMPROPERLY POSED PROBLEMS IN PARTIAL DIFFERENTIAL EQUATIONS. Soc. Ind. and Appl. Math., Philadelphia, Penn. (1975)
- [82] J.H. Wilkinson: THE ALGEBRAIC EIGENVALUE PROBLEM. Oxford Univ. Press (1965)
- [83] R. Zurmühl: PRAKTISCHE MATHEMATIK, 5. Aufl., Springer V., Berlin (1965)
- [84] J.W. Cooley, J.W. Tukey: An algorithm for the machine calculation of complex Fourier series. Math. Comput. 19 (1965) 297-301
- [85] IBM: System/360 Scientific Subroutine Package (PL/1) (360A-CM-07X) H20-0586-0(1968)
- [86] J.W. Cooley, P.A. W. Lewis, P.D. Welch: The Fast Fourier Transform algorithm: programming considerations in the calculation of sine, cosine and Laplace transforms. J. Sound Vibr. 12 (1970) 315-337
- [87] Die FORTRAN-Subroutine POISSX ist erhältlich von: Nuclear Energy Agency Computer Program Library, Casella Postale No. 15, I-21027 Ispra (Va), Italien.
- [88] U. Schumann: On fast direct methods for the solution of discretized elliptic equations. In [3] (1978)
- [89] U. Schumann: Report on the GAMM-Workshop on fast solution methods for the discretized Poisson equation. In [3] (1978)
- [90] W. Proskurowski, O. Widlund: On the numerical solution of Helmholtz's equation by the capacitance matrix method. Math. Comput. 30 (1976) 433-468
- [91] F.C. Nelson, R. Greif: On the incorporation of damping in large, general-purpose computer programs. Nucl. Eng. Des. 37 (1976) 65-72
- [92] L. Fox, I.B. Parker: CHEBYSHEV POLYNOMIALS IN NUMERICAL ANALYSIS. Oxford Univ. Press (1968)
- [93] U. Schumann: Dynamics of a nuclear-reactor shell-structure in an incompressible fluid. In: U. Müller, K.G. Roesner, B. Schmidt (Hrsg.): RECENT DEVELOPMENTS IN THEORETICAL AND EXPERIMENTAL FLUID MECHANICS - COMPRESSIBLE AND INCOMPRESSIBLE FLOWS. Springer Verlag (1979), im Druck
- [94] Projekt Nukleare Sicherheit, Projekt Leitung, Kernforschungszentrum Karlsruhe (unveröffentlicht)
- [95] Kraftwerk Union AG: Sicherheitsbericht, 1300 MWe-Kernkraftwerk mit Druckwasserreaktor für Rheinisch-Westfälisches Elektrizitätswerk AG, Essen (Febr. 1971)

- [96] P. Pana: Eine modifizierte Bernoulli-Gleichung für die Berechnung der Strömungsvorgänge im unterkühlten Wassergebiet. Institut für Reaktorsicherheit, Köln, Bericht IRS-W-18 (1975)
- [97] L. Prandtl: FÜHRER DURCH DIE STRÖMUNGSLEHRE. F. Vieweg Verlag, Braunschweig, 6. Aufl. (1965)
- [98] G. Enderle, F. Katz, H. Möisinger, E.G. Schlechtendahl, K. Stölting: Belastung eines DWR-Kernmantels nach dem Bruch der Hauptkühlmittelleitung. Reaktortagung, 4.-7. April, Hannover, (1978), 222-225
- [99] A. Ludwig, U. Schumann: Eigenschwingungen eines Druckwasser-Reaktor-Kernmantels in Vakuum und Wasser. Reaktortagung 4.-7. April, Hannover, (1978), 130-133
- [100] K. Magnus: SCHWINGUNGEN. Teubner Verlag, Stuttgart, (1961)
- [101] A. Ludwig: persönliche Mitteilung (1977)
- [102] Der Film mit FLUX2-Ergebnissen zur Fluid-Struktur-Koppelung ist im Institut für Reaktorentwicklung, Kernforschungszentrum Karlsruhe, stationiert.
- [103] H. Möisinger: Assessment of a drift-flux approximation for a strongly transient two-phase flow. Specialist's Meeting on Transient Two-Phase Flow, Paris, June (1978)
- [104] J. Zierep: ÄHNLICHKEITSGESETZE UND MODELLREGELN DER STRÖMUNGSLEHRE. G. Braun, Karlsruhe (1972)
- [105] U. Schumann: Fast elliptic solvers and their application to fluid dynamics problems. Von Karman Institute for Fluid Dynamics, Lect. Ser. 4: Comp. Fluid Dyn. (13-17 March) (1978), Hemisphere Publ. Co. (1979), im Druck.